Вторая молодость формулы Герона, или Почему кузнечные меха нельзя сделать в форме многогранников

И.Х. Сабитов

Иджад Хакович Сабитов, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Лауреат международного конкурса им. Н.И. Лобачевского (1997). Руководитель проектов 93-01-00154, 96-01-00836, 99-01-00867.

Со студенческих лет мне запомнилось образное описание процесса познания мира, которое я прочитал у Г. Спенсера, любимого философа героев-интеллектуалов Джека Лондона. Спенсер сравнивал процесс получения новых знаний с расширяющейся сферой: внутренность сферы заполнена уже известными нам знаниями, точки вне сферы соответствуют тем свойствам окружающего нас мира, о которых мы пока не догадываемся, и поэтому мы не можем даже ставить о них вопросы, а вопросы можно задавать лишь в точках сферы, т.е. на границе знания и незнания. История проблемы «кузнечных мехов», о которой мы хотим рассказать,— очень хорошая иллюстрация этой мысли Спенсера.

С чего все начиналось

Проблема «кузнечных мехов» появилась в теории изгибаний многогранников, и мы начнем с изложения основных понятий этой теории.

Изгибанием многогранника называется такая непрерывная его деформация, при которой изменяется хотя бы один из двугранных углов при ребрах, но грани остаются конгруэнтными (равны ми) исходным. Иначе говоря, в теории изгибаний грани многогранника рассматриваются как абсолютно твердые пластинки, способные вращаться вокруг ребер и вершин. На «инженерном» языке это означает, что вдоль ребер грани имеют шарнирные связи, а вершины многогранника считаются сферическими шарнирами. Если многогранник допускает деформацию такого вида, он называется *изгибаемым*, в противном случае — *неизгибаемым*.

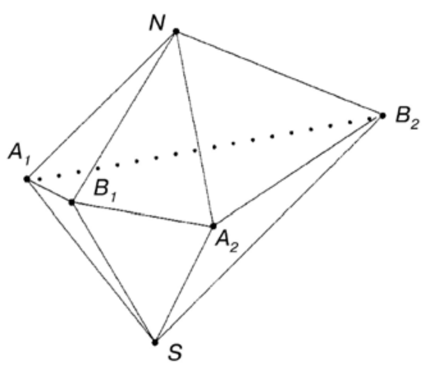

Рис.1. Модель выпуклого октаэдра

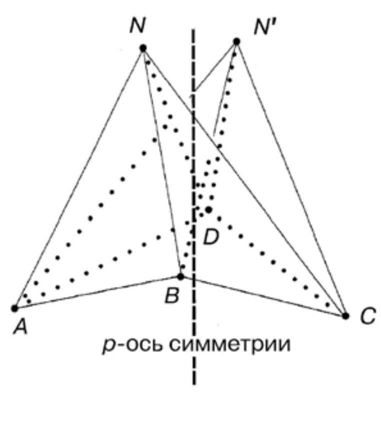

Рис.2. Изгибаемый октаэдр Брикара, имеющий самопересечения.

Простейший пример изгибания многогранника — открытие или закрытие книги с твердой обложкой (многогранник может иметь край). Примеры посложнее: трехгранный угол неизгибаем, а n-гранный угол при $n>3$ изгибаем и имеет $n-3$ степени свободы деформаций. Если многогранник еще сложнее, и особенно если он замкнутый, т.е. не имеет края, исследование его изгибаемости — уже сложная математическая задача, так как изгибания всех многогранных углов при вершинах должны быть согласованы между собой. Первый значительный результат в теории изгибаний многогранников получил О. Коши, чья знаменитая теорема (1813) утверждает, что *любой выпуклый многогранник неизгибаем*. Вопрос о том, бывают ли замкнутые многогранники изгибаемыми, долгое время оставался открытым. Лишь в 1897 г. бельгийский инженер Р. Брикар доказал, что существуют изгибаемые октаэдры (схему строения октаэдра см. на рис.1), и дал полную их классификацию. Оказалось, что есть три типа изгибаемых октаэдров. Дадим для примера описание октаэдров первого типа.

Пусть четырехугольник L: $ABCD$ (он может быть и пространственным) имеет попарно равные противоположные стороны $AB=CD$ и $BC=DA$. Тогда легко показать, что у него всегда есть ось симметрии p, проходящая через середины диагоналей AC и BD (если четырехугольник L плоский, то он — параллелограмм с осью симметрии p, проходящей через точку пересечения диагоналей перпендикулярно его плоскости). Возьмем в пространстве произвольную точку N, не лежащую на оси симметрии, и, соединив ее со всеми вершинами L, получим четырехгранный угол P: $NABCD$, который, как было сказано, изгибаем. Пусть N'— точка, симметричная N относительно прямой p. Построим четырехгранный угол P':$N'ABCD$ и склеим P и P' вдоль общего края L. Новый *замкнутый* многогранник $NABCDN'$ будет иметь такой же закон соединения граней, как и октаэдр на рис.1. При изгибании части P часть P' изгибается так, что точка N' все время перемещается симметрично N относительно переменной оси симметрии четырехугольника L, т.е. обе части изгибаются согласованно. Итак, октаэдр $NABCDN'$ (рис.2) оказывается изгибаемым.

Легко заметить, что построенный многогранник имеет самопересечения; это же верно и для остальных типов брикаровских октаэдров. И хотя после Брикара исследования изгибаемых октаэдров разными другими методами продолжались, но главного результата — примера изгибаемого и *вложенного* в пространство (т.е. не имеющего самопересечений) многогранника все не было и не было. Более того, в 1974 г. американский математик Г. Глак доказал, что в некотором смысле почти все многогранники неизгибаемы, и поэтому поиск вложенного изгибаемого многогранника считался почти безнадежным. Тем не менее, в 1977 г. Р. Коннелли из Корнельского университета (США) сумел построить такой многогранник — весьма сложную конструкцию с 18 вершинами*. Подробное его описание можно найти в журнале «Квант» [1,2]; есть, конечно, и оригинальные публикации [3].

Вскоре после Коннелли немецкий математик К. Штефен предложил еще один многогранник, всего с 9 вершинами, который до сих пор остается самым простым примером вложенного изгибаемого многогранника. Идея его построения следующая. Удалив из брикаровского октаэдра 1-го типа две грани ABN' и BCN', получим изгибаемый многогранник Q_1 без самопересечений, но с краем $ABCN'$ (расстояние BN' постоянно как длина ребра BN' в исходном октаэдре). Берем точно такой же экземпляр многогранника $Q_2=Q_1$ и склеиваем его по ребрам AB и AN' с Q_1. Изгибая Q_1и Q_2, разводим вершины $C\in Q_1$и $C\in Q_2$ (вращая их вокруг прямой BN'). Зафиксируем новые положения этих вершин $C_1\in Q_1$и $C_2\in Q_2$ и переобозначим так же новые положения двух других вершин, подвергшихся перемещениям, — N_1, N_2и D_1, D_2. Оказывается, новый многогранник с 4-угольным краем C_1BC_2N' можно изгибать так, что расстояние C_1C_2 будет оставаться постоянным! Поэтому его край можно закрыть крышкой, состоящей из треугольников C_1BC_2и $C_2N'C_1$. Однако полученный многогранник будет вложенным не всегда, а только при определенных сочетаниях длин сторон. На рис.3 дана развертка, из которой можно склеить вложенный многогранник Штефена из листа формата А4.

* Каждый исследователь знает, как психологически важно быть уверенным, что поиск истины ведется в нужном направлении. Насколько неопределенной была возможность нахождения изгибаемого многогранника, видно хотя бы из того, что всего за два-три года до построения своего примера Коннелли серьезно искал под ходы к доказательству неизгибаемости всех вложенных многогранников.

Отметим, что примеру Штефена уже более 20 лет, но вопрос о существовании изгибаемого многогранника без самопересечений с меньшим (чем девять) числом вершин пока остается открытым.

Почти сразу же после построения изгибаемых многогранников обнаружилось, что все они обладают удивительным свойством: *в ходе изгибания их объем остается неизменным*. Неизвестно, кто заметил это свойство первым. В августе 1978 г. на Международном математическом конгрессе в Хельсинки Коннелли высказал гипотезу (со ссылкой на Д. Сулливана) о том, что оно является общим для всех изгибаемых многогранников. Ее справедливость означала бы, что математически идеальные изгибаемые многогранники с отверстием на одной или нескольких гранях нельзя использовать как кузнечные меха. Действительно, по известному закону Бойля—Мариотта *pv=const* (*p* — давление, *v* — объем) получается, что при изгибании многогранника давление внутри него изменяться не должно, поэтому воздух ни входить, ни выходить из него не будет**.

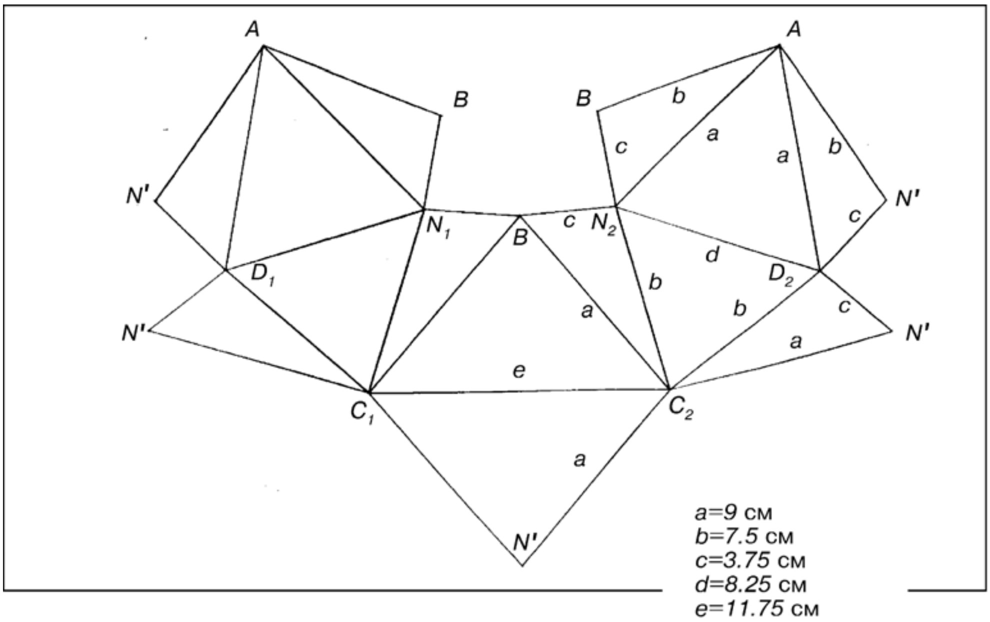

Рис.3. Развертка многогранника Штефена.

Вот почему Коннелли и назвал проблему постоянства объема изгибаемого многогранника гипотезой «кузнечных мехов» («the bellows conjecture»).

Попытки решения проблемы

Итак, пока не было известно ни одного примера изгибаемых многогранников, никто не задумывался над таким гипотетически возможным их свойством (вот оно, мудрое наблюдение старика Спенсера!). Но очень скоро после своего появления гипотеза «кузнечных мехов» стала считаться одной из самых красивых и притягательных задач, и многие «изгибальщики» тайно или явно искали подходы к ее решению. Главная трудность — не было никакой уверенности в справедливости гипотезы. По-видимому, многие склонялись к мысли, что она неверна, и искали контр примеры. При этом были и курьезные случаи. Рассказывают, что на Западе на одной из научных выставок как опровержение этой гипотезы демонстрировали модель «изгибаемого» многогранника, из которой при ее деформации со свистом выходил воздух, так что на ней можно было играть, как на волынке.

** Любопытно отметить, что Сулливан проводил опыт именно такого рода: он наполнял внутренность изгибаемого многогранника табачным дымом и убеждался, что при изгибании многогранника дым из него не выходит; позже одним популяризатором науки это наблюдение образно было сформулировано так: *многогранники могут двигаться, но не могут дышать*.

Но позже выяснилось, что в математическом смысле модель неизгибаема, а ее «изгибания» — следствие растяжения матери ала. Из серьезных попыток можно упомянуть две работы новосибирского математика В.А. Александрова. В первой из них [4] он вычислял скорость изменения (т.е. производную) объема многогранника в начальный момент деформации, представляющей линейную аппроксимацию (аналог дифференциала) изгибания. Если бы скорость равнялась нулю, мы имели бы доказательство гипотезы, так как любой момент изгибания можно рас сматривать как начальный, и функция (объем), имеющая нулевую производную в любой точке, будет, конечно, постоянной. Увы, оказалось, что в общем случае это не так (Александров привел соответствующий пример), и поэтому дальнейшие поиски положительного решения проблемы «кузнечных мехов» в рамках этой идеи потребовали бы привлечения производных высших порядков от деформации изгибания. В основе второй работы Александрова [5] лежали следующие соображения: все известные примеры изгибаемых многогранников так или иначе основаны на использовании октаэдров Брикара, и, может быть, их объем постоянен именно в силу этой причины? Тогда контр пример надо искать среди других многогранников, никак не связанных с октаэдрами Брикара. Александров построил изгибаемые многогранники, гомеоморфные тору, и вы числил их объемы. Оказалось, все они остаются постоянными в ходе изгибания! Опровержения гипотезы не получилось, но появились новые примеры изгибаемых многогранников.

Многогранники и их обобщенные объемы

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые новые понятия и определения. Прежде всего, определим, что такое многогранник с данным комбинаторным строением. Пусть есть некоторое множество плоских треугольников (как в детском наборе типа «Сделай сам») и указано, какие стороны, каких треугольников склеиваются (или, как говорят математики, *отождествляются*) друг с другом. При склеивании соблюдаются следующие правила: 1) отождествление проходит по всей стороне, так что склеиваются стороны равной длины, и при этом указываются также отождествляемые вершины (т.е. склеивания стороны AB с равной ей стороной CD, при которых A склеивается с C, B с D или, наоборот, A с D, B с C — это два разных способа отождествления); 2) каждая сторона является общим ребром только двух треугольников, и два треугольника могут приклеиваться только по одной стороне; 3) треугольники, которые после склеивания имеют одну общую вершину (обозначим ее A), можно перенумеровать в некотором порядке так, что каждый следующий имеет с предыдущим общую сторону, исходящую из A. Последний же имеет общую сторону с предпоследним и первым (т.е. треугольники с общей вершиной можно схематически расположить как секторы круга, образованные несколькими радиусами, выходящими из центра; заметьте, что число радиусов должно быть не меньше трех). Множество треугольников с указанным законом отождествления их сторон называется *разверткой*, а закон отождествления сторон называется *комбинаторным строением* развертки. Таким образом, комбинаторное строение развертки можно задать списком всех треугольников и всех отождествляемых вершин и сторон. Для краткости будем обозначать этот список одной буквой K и будем говорить, что развертка имеет комбинаторное строение K.

Многогранник с комбинаторным строением K получается отображением развертки с комбинаторным строением K в трехмерное пространство R^3. Для этого достаточно отобразить вершины развертки в R^3, следя за тем, чтобы отождествляемые вершины перешли в одну точку пространства (это и есть операция отождествления на практике). Затем, зная из списка K, какие вер шины соединены отождествляемыми сторонами, мы соединим в пространстве образы соответствующих вершин отрезками и получим *ребра* многогранника (вот отождествляемые стороны и *склеились* вместе в одно ребро!). Далее, на основе того же списка K по вершинам и сторонам можем построить грани многогранника. Рассматриваемое отображение будем условно обозначать как P: $K \to R^3$ и его образ $P(K)$ назовем многогранником с комбинаторным строением K. Заметим, что по внешнему виду такая конструкция может сильно отличаться от привычных нам форм многогранников. Сравните, например, октаэдры на рис.1 и 2: они оба имеют одно и то же комбинаторное строение, поэтому обычный октаэдр на рис.1 можно было бы называть комбинаторной моделью октаэдра.

Подчеркнем, что в $P(K)$ могут быть самопересечения, некоторые грани могут вырождаться в отрезки (если случайно все три вершины грани оказались на одной прямой), а ребра — в точки и т.д. С первого взгляда неясно, что же называть объемом такого сложного объекта. Поэтому сначала надо обобщить понятие объема. Пусть комбинаторное строение развертки таково, что она может быть *ориентирована* — границу каждого плоского треугольника можно обойти так, чтобы общие ребра двух соседних (т.е. склеенных вдоль этого ребра) треугольников проходились бы в противоположных направлениях. Про такие треугольники говорят, что они ориентированы *согласованно*. Ориентацию граней многогранника $P(K)$ определяем, сохраняя при отображении P: $K \to R^3$ правила обхода треугольников развертки. Теперь вспомним определение объема ориентированного (с заданным обходом основания) тетраэдра. Если его задать векторами a, b, c, идущими из вершины O в вершины A, B, C, соответственно (рис.4), то ориентированный объем VT тетраэдра $OABC$ — смешанное произведение векторов a, b, c (это обычный объем, взятый со знаком ± в зависимости от того, составляют ли векторы правую или левую тройку). Когда векторы даны своими координатами a = $\{x_1, y_1, z_1\}$, b = $\{x_2, y_2, z_2\}$, c = $\{x_3, y_3, z_3\}$, вычисление ориентированного объема тетраэдра сводится к вычислению определителя третьего порядка

$$V_{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Обобщенным объемом V ориентированного многогранника P назовем сумму ориентированных объемов V_i тетраэдров с некоторой общей вершиной O и с основаниями на согласованно ориентированных гранях многогранника, т.е. $V(P)=\Sigma_i V_i$ (суммирование по всем граням многогранника). Нетрудно показать, что значение ориентированного объема на самом деле не зависит от выбора точки O, и для многогранников без самопересечений обобщенный объем совпадает с их обычным ориентированным объемом. Ясно, что обобщенный объем может быть равным, в частности, и нулю.

Ответ подсказывает формула Герона—Тарталья

Приведем некоторые соображения, легшие в основу нашего подхода к проблеме «кузнечных мехов». Сначала посмотрим, как можно вычислять объемы простейших многогранников.

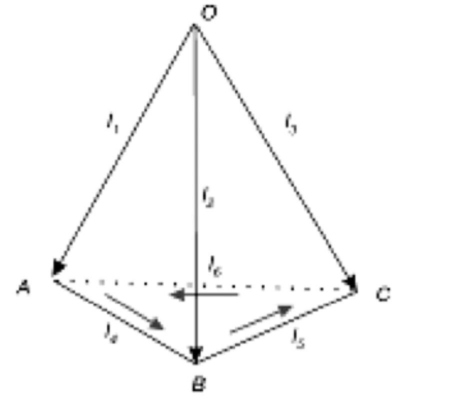

Рис.4. Ориентированный тетраэдр — элементарная фигура для нахождения обобщенного объема многогранника.

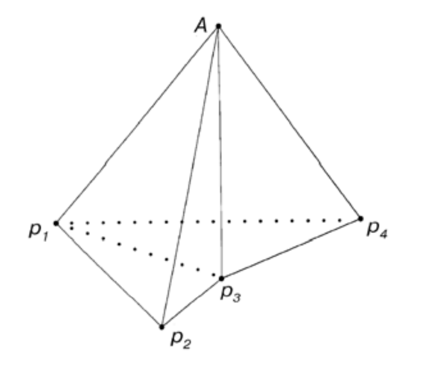

Рис.5. Четырехугольная пирамида с разбиением на два тетра

Объем тетраэдра. Напомним, что по известной формуле Герона площадь S треугольника выражается через длины его сторон a, b, c равенством

$$16S^2 = (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Существует обобщение этой формулы, позволяющее вычислить объем тетраэдра через длины его ребер: если у тетраэдра (рис.4) длины ребер равны l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, то для его объема V верна формула*

$$V^2 = 1/144\cdot[l_1^2l_5^2(l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2l_6^2(l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) +$$
$$+ l_3^2l_4^2(l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2l_2^2l_4^2 - l_2^2l_3^2l_5^2 - l_1^2l_3^2l_6^2 - l_4^2l_5^2l_6^2]. \quad (1)$$

Обобщенный объем V *четырехугольной* пирамиды (рис.5) с триангулированным основанием можно вычислить как алгебраическую сумму объемов V_1 тетраэдра $Ap_1p_2p_3$ и V_2 тетраэдра $Ap_1p_3p_4$:

$$V = V_1 \pm V_2 \Rightarrow V^4 - 2(V_1^2 + V_2^2)V^2 + (V_1^2 - V_2^2)^2 = 0,$$

и так как V_1^2 и V_2^2 выражаются по формуле (1) через квадраты длин соответствующих ребер, то для обобщенного объема V четырехугольной пирамиды имеем полиномиальное уравнение:

$$Q(V) = V^4 + a_1(l)V^2 + a_2(l) = 0. \quad (2)$$

Мы хотим подчеркнуть, что объем *любого* многогранника с 5 вершинами и с данным комбинаторным строением является корнем *одного и того же* уравнения (2), которое выписывается независимо от конфигурации вершин или положения многогранника в пространстве, а определяется *только* за данным комбинаторным строением и длинами ребер многогранника.

Таким образом, в простейших случаях обобщенные объемы многогранников — корни полиномиальных уравнений с коэффициентами, которые не зависят от расположения вершин многогранника в пространстве, а представляют собой многочлены от квадратов длин его ребер. Числовые коэффициенты этих многочленов задаются комбинаторным строением многогранника, т.е. у многогранников с одинаковым строением уравнение для обобщенного объема будет одним и тем же.

Второе наблюдение более тонкое, и за недостатком места мы лишь вкратце изложим его суть. Из одной и той же развертки можно склеить, вообще говоря, много разных многогранников. Можно показать, что среди них не изгибаемые составляют конечное множество, а изгибаемые (если они есть) разбиваются тоже на конечное число семейств, каждое из которых состоит из многогранников, получаемых друг из друга изгибанием. Значит, если гипотеза «кузнечных мехов» верна, то множество значений объемов всех многогранников, имеющих данное комбинаторное строение и данный набор длин ребер, должно быть конечным.

Основная теорема и ее следствия

На основании этих наблюдений естественно было предположить, что путь решения проблемы «кузнечных мехов» не надо искать в узких условиях самой задачи, когда математически очень трудно выразить и тем более использовать свойство изгибаемости исследуемого многогранника, а надо попытаться установить «конечнозначную зависимость» объема *любого* многогранника от его метрики и комбинаторного строения.

* История получения этой формулы заслуживает отдельного рассказа; здесь мы отметим только, что уже в XVI в. Н. Тарталья умел вычислять объем тетраэдра через длины его ребер, поэтому, на наш взгляд, формулу (1) исторически справедливо было бы называть формулой Герона—Тарталья, что мы и отразили в подзаголовке.

Такое предложение было впервые высказано автором еще в 1989 г. и затем реализовано в серии его работ [6,7] в 1995—1996 гг. В окончательном виде основная теорема об объеме многогранников формулируется так.

Теорема. Пусть $[P]$ — множество всех многогранников в R^3, имеющих одинаковое комбинаторное строение K и одинаковый набор длин ребер (l_1, ..., l_e), где e — число ребер. Тогда можно указать некоторый многочлен:

$$Q(V) = V^{2N} + a_1V^{2N-2} + ... + a_{N-1}V^2 + a_N, \qquad (3)$$

такой, что обобщенный объем каждого многогранника из $[P]$ является корнем этого многочлена, в котором коэффициенты a_i $(1 \le i \le N)$ сами являются многочленами от $(l_1^2, ..., l_e^2)$ с числовыми коэффициентами, зависящими от комбинаторного строения многогранника.

Из этой теоремы вытекают два очевидных следствия.

Следствие 1. Множество значений обобщенных объемов всех изометричных между собой многогранников с данным комбинаторным строением и с данным набором длин ребер конечно.

Следствие 2. Обобщенный объем изгибаемого многогранника в ходе изгибания остается постоянным.

Действительно, с одной стороны, объем многогранника при изгибании должен изменяться непрерывно, а с другой — принимать лишь конечное число значений. Обоим условиям удовлетворяет лишь функция, принимающая постоянное значение, поэтому утверждение гипотезы «кузнечных мехов» — простое следствие основной теоремы, которую естественно интерпретировать как обобщение формулы Герона—Тарталья для объема тетраэдров на объемы общих многогранников.

Отметим, что теорема верна и для многогранников с нетреугольными гранями — ведь каждую твердую грань можно разбить системой диагоналей на треугольные грани.

Здесь мы, конечно, не можем излагать доказательство теоремы, скажем лишь, что оно конструктивное и проводится методом индукции по числу вершин и по топологическому роду многогранников, причем указывается явный алгоритм построения искомого полиномиального уравнения для многогранников, начиная с простых случаев и переходя постепенно к более сложным комбинаторным типам. Базой индукции служит формула (1) для объема тетраэдра.

Несколько позже американские математики Р. Коннелли и А. Вальц тоже доказали существование такого многочлена, отправляясь от тех же геометрических идей, что и автор в своих работах, но используя другой алгебраический аппарат. Их метод дает только сам факт существования требуемого многочлена, но не указывает способ его построения.

Примеры

Первый пример — это, конечно, многочлен (1) для объема тетраэдра. Он имеет два корня, соответствующие двум разным выборам ориентации тетраэдра. Это уравнение содержит 23 монома (слагаемых).

Второй пример дается биквадратным уравнением (2), содержащим уже около двух тысяч мономов.

Следующий по сложности многогранник — это октаэдр, имеющий шесть вершин (случай пятиугольной пирамиды с тремя треугольниками в основании читатель может легко разобрать сам — должен получиться многочлен степени 8). Многочлен для объема октаэдра, получаемый по методу доказательства основной теоремы, имеет степень $1024=2^{10}$. Его впервые нашла Оксана Павлова в своей дипломной работе в 1991 г. Впоследствии А.В. Астрелин и автор предложили новый способ построения многочлена, и степень последнего оказалась 16 (фактически 8, так как в нем только четные степени объема).

Как пример, приведем многочлен для объема брикаровского октаэдра 1-го типа. Пусть на изображенной на рис.1 комбинаторной схеме октаэдра заданы квадраты длин ребер:

$$(A_1B_1)^2 = (A_2B_2)^2 = a,\ (B_1A_2)^2 = (A_1B_2)^2 = b,\ (NB_1)^2 = (SB_2)^2 = c,\ (NB_2)^2 = (SB_1)^2 = d,\ (NA_1)^2 = (SA_2)^2 = e,\ (NA_2)^2 = (SA_1)^2 = f,$$

тогда уравнение (3) для объема имеет вид:

$$Q(v) = v^8 - 4[ab(c + d + e + f - a - b) + cd(a + b + e + f - c - d) + $$
$$+ ef(a + b + c + d - e - f) - eac - fad - fbc - ebd]v^7 = 0.$$

Здесь положено $v = 36V^2$. Среди этих октаэдров есть октаэдры Брикара, и нулевой корень $v = 0$ соответствует именно их обобщенному объему, но есть и неизгибаемый с ненулевым объемом.

Для октаэдра в общем положении (т.е. с 12 разными буквенными значениями длин ребер) многочлен минимальной степени для объема содержит уже несколько миллионов (!) слагаемых, и поэтому выписать его в общем виде, конечно, нельзя. Но работать с ним можно: вы вводите конкретные численные значения длин ребер, и компьютер выдает искомый многочлен для объема с численными значениями коэффициентов. Вот пример такого вычисления, выполненный студентом МГУ Сергеем Михалевым. Пусть длины ребер октаэдра заданы так:

$$(NA_1)^2=41,\ (NB_1)^2=34,\ (NA_2)^2=29,\ (NB_2)^2=26,\ (SA_1)^2=52,\ (SB_1)^2=45,\ (SA_2)^2=40,\ (SB_2)^2=37,\ (A_1B_1)^2=25,\ (B_1A_2)^2=13,\ (A_2B_2)^2=5,\ (B_2A_1)^2=17.$$

Тогда получаем следующее уравнение для объема (положено $v=36V^2$):

$$v^8 - 97600v^7 + 2150278656v^6 - 14733233766400v^5 + +28949731124248576v^4 - $$
$$-16429559369328230400v^3 + 2673932358387945701376v^2 - $$
$$-135342229652751620505600v + 1546362629160356875862016 = 0.$$

Оно имеет восемь корней [16, 64, 144, 576, 1936, 7744, 17424, 69696], которые соответствуют 16 объемам (со знаком ±) восьми реально существующих октаэдров с указанными длинами ребер. Следовательно, для октаэдров степень 16 — минимально возможная для многочлена $Q(V)$, так как ни один многочлен степени меньше 16 не может иметь в качестве своих корней все эти 16 значений объемов изометричных октаэдров.

Что дальше?

Полученное обобщение формулы Герона—Тарталья открывает совершенно новые возможности для работы с многогранниками. Прежде всего, не имея даже самого многогранника, а зная только его натуральную развертку (раз вертка называется натуральной, если все треугольники развертки, и только они, суть будущие грани многогранника), мы можем составить многочлен

(3) для объема и еще до построения многогранника сказать, что значение его объема должно быть среди корней этого многочлена. Более того, если окажется, что для выписанного многочлена все его корни V^2 — отрицательные или комплексные числа, значит, из такой развертки нельзя склеить ни одного многогранника. Итак, у нас есть способ проверить, можно ли построить многогранник по заранее заданной натуральной развертке, только на основе вычисления корней многочлена для объема.

Далее, можно вывести уравнения, позволяющие в общем случае определять двугранные углы между склеиваемыми гранями. Возможных значений этих углов оказывается конечное число; построение многогранника по его граням на каждом шаге сводится к правильному выбору угла между склеиваемыми гранями, и поэтому путем хотя бы перебора вариантов мы или склеим многогранник по его натуральной развертке, или убедимся в невозможности этого. Таким образом, открывается путь алгоритмического решения задачи о построении многогранника по его натуральной развертке. Все эти операции по аналогии с известным термином «решение треугольников» логично назвать «решением многогранников», но только, конечно, с применением компьютеров. Правда, вычисления настолько большие, что мощности персональных компьютеров пока не хватает даже для того, чтобы найти многочлен для объема многогранника Штефена. Тем не менее, важно, что задачи метрической геометрии многогранников теперь становятся конечно-вычислимыми, в принципе, по крайней мере, в том же смысле, в каком шахматы являются конечной игрой.

Многообещающими кажутся также возможные применения обобщения формулы Герона—Тарталья в естествознании. Например, в молекулярной химии структура молекул определяется связями между атомами, длины которых часто постоянны, и поэтому связи могут играть роль ребер. Зная их длины, можно заранее предвидеть возможное строение молекулы, ее объем, размеры и т.д., что даст ценную информацию о свойствах искусственно создаваемого материала. Физика твердого тела, кристаллография, теория растворов — вот другие потенциальные области применения. По-видимому, и сами изгибаемые многогранники — их способность изменять форму с сохранением внутреннего давления и объема — обязательно должны найти какие-нибудь применения в сложных конструкциях, на пример в приборах, в оригинальных игрушках, в хитроумных объектах дизайна и т.д.

Вместе с тем, в подтверждение Спенсеру, мы видим, что новое знание приносит массу новых вопросов. Прежде всего — самый интересный для математиков — это проблема получения многочлена для объема многогранников в многомерном пространстве; она неожиданно оказалась очень трудной, и здесь пока получены только самые первые результаты. Новая обширная область исследований — изучение алгебраических свойств многочлена для объема. Так, по-видимому, верно следующее утверждение: если многогранник изгибаем, то значение его объема является кратным корнем многочлена для объема (в приведенной формуле для объема брикаровского октаэдра это так). Верно ли это на самом деле? В чем смысл порядка кратности корня? Является ли каждый неотрицательный корень многочлена величиной объема какого-либо действительно существующего многогранника? В чем смысл комплексных и отрицательных корней многочлена? Как найти канонический многочлен наименьшей степени? (Сейчас мы умеем делать это только для многогранников с топологией сферы.) Каковы гидромеханические законы нашего мира, которые допускают возможность таких деформаций* многогранника? По каким законам перемещаются несжимаемые газы и жидкости внутри изгибаемого многогранника в ходе его деформации? Этот список вопросов можно продолжать и продолжать.

...В то же самое время, когда я прочитал спенсеровское сравнение развития познания с расширяющейся сферой, я пришел к унылому заключению, что чем больше мы узнаем, тем больше появляется новой неизвестности, так как площадь границы шара знаний растет с ростом его радиуса. Но я очень быстро нашел оптимистический выход из этого пессимистического наблюдения. Если разделить сумму приобретенного знания — объем шара — на количество новой неизвестности — площадь сферы,— то это отношение будет расти с увеличением радиуса. Вот мы и имеем умозрительный аргумент, оправдывающий занятия наукой: действительно, на первый взгляд кажется, что чем больше мы знаем, тем больше мы не знаем, но в относительном сравнении масса наших приобретенных знаний монотонно растет по сравнению с незнанием (а тот факт, что незнание за пределами сферы знаний все равно остается бесконечным, нас не должно очень тревожить, так как это — незнание, о котором мы вообще ничего не знаем, и оно нас эмоционально не трогает). Несомненно, и новая формула для объема многогранника, на самом деле отражающая некоторые глубинные свойства окружающего нас мира, очень скоро должна дать новые знания об этом мире.

* Заметим, что в трехмерном сферическом пространстве (с положительной постоянной кривизной) это не так: как показал В.А. Александров, там есть изгибаемые многогранники с изменяющимся объемом.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Залгаллер В.А. Непрерывно изгибаемый многогранник // Квант. 1978. №9. С.1319.*
2 *Медяник А.И. Модель многргранника Коннелли // Квант. 1979. №7. С.39.*
3 *Connelly R. A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra // Publications Mathematiques, I.H.E.S. 1978. V.47. P.333—338.*
4 *Александров В.А. Замечания к гипотезе Сабитова о стационарности объема при бесконечно малом изгибании поверхности // Сиб. мат. журн. 1989. Т.30. №5. С.16— 24.*
5 *Александров В.А. Новый пример изгибаемого многогранника // Сиб. мат. журн. 1995. Т.36. №6. С.1215—1224.*
6 *Сабитов И.Х. К проблеме об инвариантности объема изгибаемого многогранника // Успехи мат. наук. 1995. Т.50. №2. С.223—224.*
7 *Сабитов И.Х. Объем многогранника как функция его метрики // Фундам. и прикл. математика. 1996. Т.2. №4. С.1235—1246.*