# Фракталы и комплексная динамика

Б.Н. Хабибуллин, Ш.И. Цыганов

*Булат Нурмиевич Хабибуллин, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии Башкирского государственного университета. Руководитель проекта 99-01-00159.*

*Шамиль Ириуович Цыганов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры и геометрии того же университета.*

Хорошо известно, что шахматы представляют собой спорт, науку и искусство одновременно. В начале 80-х годов прошлого столетия появился раздел математики, претендующий на роль живописца, создающего выдающиеся произведения искусства. Это – комплексная динамика, изучающая геометрические объекты, получившие названия фракталов, компьютерные об разы которых экспонируются на крупнейших художественных выставках мира.

Слово ***фрактал*** (происходит от латинского ***fractus***, что значит дробь, дробный) было введено Бенуа Мандельбротом. Этот американский математик первым построил классическое множество, впоследствии получившее его имя. С математической точки зрения фрактал – это множество, имеющее дробную размерность.

Мы начнем рассмотрение с простейшего одно мерного фрактала (канторова множества), опишем плоские фракталы – от снежинок Кох и ковра Серпинского до классических множеств Мандельброта и Жюлиа – и, наконец, расскажем о фракталах в многомерных комплексных пространствах.

## *Канторово множество*

Построение канторова множества носит пошаговый характер. Пусть множество $K_0$ – отрезок [0, 1]. Делим его на три равные части и выбросим средний интервал (1/3, 2/3). В результате получаем множество

$$K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

К каждому из отрезков [0, 1/3] и [2/3, 1] применяем ту же процедуру: выбрасываем средние интервалы (1/9, 2/9) и (7/9, 8/9) соответственно. Остается множество $K_2$, состоящее из четырех отрезков длины $(1/3)^2$ каждый. Продолжая эту процедуру, получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, таких что множество $K_n$ состоит из $2^n$ отрезков длиной $(1/3)^n$ каждый, так что общая длина $K_n$ равна $(2/3)^n$.

*Рис.1. Последовательное построение канторова множества.*

Множество $K_n$ называется предканторовым, само канторово множество определяется как пересечение всех предканторовых:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} Kn.$$

Изучим структуру канторова множества $K$. Очевидно, что длина $K$ равна нулю и $K$ содержит точки 0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, ... – концы выбрасываемых интервалов. Эти точки образуют бесконечное и счетное множество. Однако $K$ несчетно. Чтобы доказать это, запишем координаты всех точек отрезка [0, 1] в троичной системе счисления. Точки интервала (1/3, 2/3) характеризуются тем, что их запись в троичной системе содержит цифру 1 на первом месте после запятой, т.е. имеет вид 0,1... . Точки из отрезков [0, 1/3] и [2/3, 1] могут быть записаны как 0,0... и 0,2... соответственно.

Точки выброшенных на втором шаге интервалов (1/9, 2/9) и (7/9, 8/9) содержат 1 на втором месте после запятой, а для оставшихся чисел возможно разложение с цифрами 0 или 2 на этой позиции. Таким образом, точки канторова множества $K$ представляются в виде троичных дробей с цифрами 0 и 2. Очевидно, что это множество несчетно.

### *Снежинка Кох*

Снежинка Кох названа в честь Гельге фон Кох, предложившей процесс ее по строения в 1904 г. Как и в случае канторова множества, он носит пошаговый характер. Пусть множество $S_0$ – отрезок [0, 1]. Делим его на три равные части и заменим средний интервал двумя связанными отрезками длины 1/3. В результате образуется ломанная $S_1$, состоящая из четырех звеньев длины 1/3. На следующем шаге та же процедура применяется к каждому из получившихся четырех звеньев в отдельности. Получаются ломанные $S_0$, $S_1$,... .

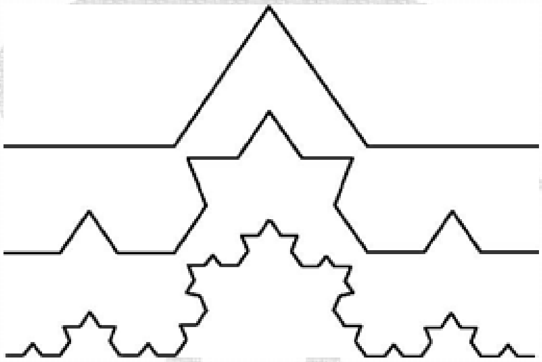

*Рис.2. Построение снежинки Кох.*

Предельная ломанная $S$ называется кривой Кох. Три кривые Кох, расположенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, которая называется снежинкой Кох.

Хотя кривая Кох ограничена, она имеет бесконечную длину. Действительно, ломанная $S_n$ состоит из $4^n$ отрезков длины $(1/3)^n$ и ее периметр равен $(4/3)^n$ .

### *Салфетка и ковер Серпинского*

Разделим правильный треугольник $T_0$ средними линиями на четыре равных треугольника и выбросим внутренность центрального. Получим множество $T_1$ из трех оставшихся квадратов. С ними проделаем ту же процедуру, получим $T_2$, и так до бесконечности. Салфеткой Серпинского называется множество

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Множество $T_n$ состоит из $3^n$ правильных треугольников, стороны которых имеют длину $(1/2)^n$ и принадлежат $T$ по построению, образуя каркас салфетки Серпинского. Легко видеть, что сумма периметров треугольников, входящих в $T_n$, стремится к бесконечности, а сумма площадей – к нулю.

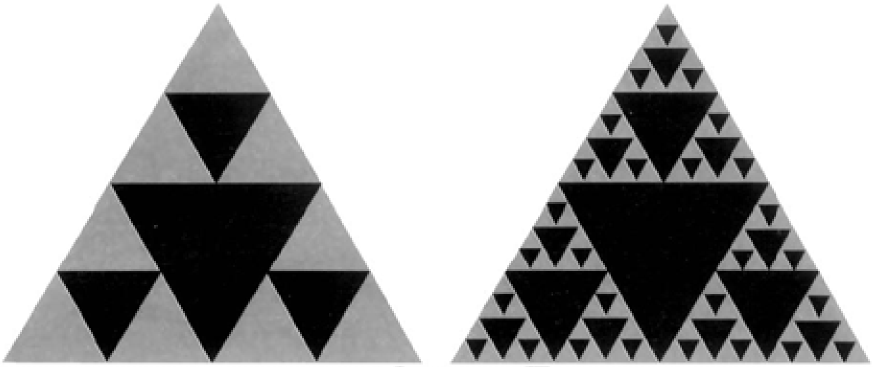

*Рис.3. Салфетка Серпинского.*

Ковер Серпинского строится аналогично. Пусть $F_0$ – единичный квадрат. Разобьем его на девять квадратов со стороной 1/3 и выбросим внутренность центрального квадрата. Оставшиеся восемь квадратов обозначим через $F_1$.

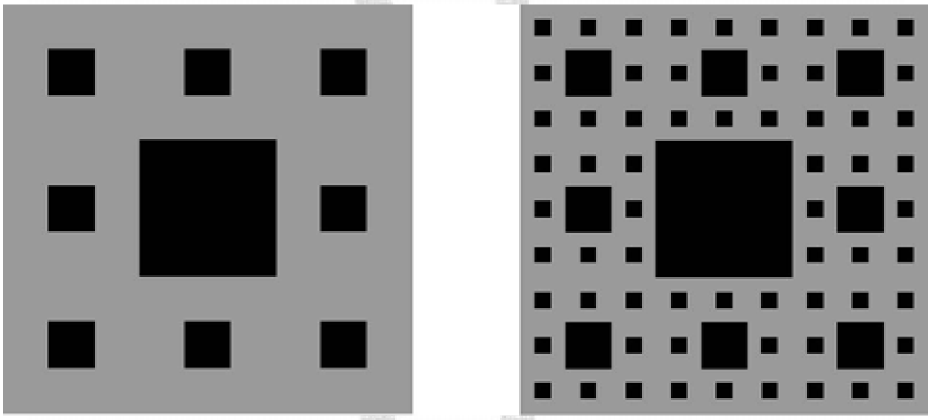

*Рис.4. Ковер Серпинского.*

Повторим процедуру с квадратами из $F_1$, и так далее до бесконечности. На $n$-м шаге получается множество $F_n$, состоящее из $8^n$ квадратов, каждый со стороной $(1/3)^n$, так что площадь $F_n$ равна $(8/9)^n$. Ковер Серпинского – это пере сечение всех $F_n$:

$$Fn = \bigcap_{n=1}^{\infty} Fn.$$

## *Свойство самоподобия фракталов*

**Определение 1.** Геометрическое множество обладает свойством самоподобия, если найдется такое натуральное число $N$, что множество разбивается на $N$ одинаковых меньших частей, подобных большому с коэффициентом $k$. Иначе говоря, если посмотреть на такой самоподобный объект в микроскоп, мы увидим ту же самую картину, что и без микроскопа.

Легко сообразить: свойством самоподобия обладают, например, отрезок, квадрат на плоскости и куб в пространстве. Действительно, отрезок можно разбить на $N$ меньших, каждый из которых подобен исходному с $k=1/N$. Для квадрата в качестве $N$ годится квадрат любого натурального числа и коэффициент подобия $k=1/\sqrt{N}$. Наконец, если стороны куба разбить на $n$ равных частей, то куб разобьется на $N=n^3$ маленьких кубиков, каждый из которых подобен исходному с $k=1/n=1/\sqrt{N}$.

Однако подавляющее большинство объектов классической геометрии не обладает свойством самоподобия. Если взять, например, гладкую кривую, то любая ее сколь угодно малая часть устроена как прямая линия. Так же просто устроены гладкие поверхности, которые «в малом» устроены как плоскости.

Канторово множество, кривая Кох, салфетка и ковер Серпинского обладают свойством самоподобия. Найдем $N$ и коэффициенты подобия $k$ из определения 1 для:

– канторова множества: $N=2$, $k=1/3$;

– кривой Кох: $N=4$, $k=1/3$;

– салфетки Серпинского: $N=3$, $k=1/2$;

– ковра Серпинского: $N=8$, $k=1/3$.

**Определение 2.** Фрактальной размерностью самоподобного геометрического множества называется такое число $D$, что с $k=1/\sqrt[D]{N}$.

Очевидно, фрактальная размерность прямой равна 1, квадрата – 2 и куба – 3. Для того чтобы вычислить фрактальную размерность остальных изучаемых нами самоподобных множеств, заметим, что $k^D \cdot N = 1$. Отсюда $D = \ln N/\ln(1/k)$.

Воспользовавшись этой формулой, получим, что для канторова множества фрактальная размерность $D = \ln 2/\ln 3 = 0{,}630929...$, для кривой Кох – $D = \ln 4/\ln 3 = 1{,}261859...$, для салфетки Серпинского – $D = \ln 3/\ln 2 = 1{,}5849...$, для ковра Серпинского – $D = \ln 8/\ln 3 = 1{,}8927....$

Воспользуемся процедурой построения канторова множества и покажем, что существуют множества любой наперед заданной фрактальной размерности $D = (0, 1)$. Для этого возьмем число $r$ такое, что $0<r<1/2$. Из отрезка $K_0 = [0, 1]$ выбросим интервал длины $1\text{-}2r$ с центром в точке 1/2. Получаем замкнутое множество $K_1$, состоящее из двух отрезков с длиной $r$. К каждому из этих отрезков применим ту же самую процедуру, и так до бесконечности. В результате получаем обобщенное канторово множество, фрактальная размерность которого равна $D = \ln 2/\ln(1/r)$.

Таким образом, существуют множества, фрактальные размерности которых совпадают с любым наперед заданным действительным числом.

**Определение 3.** Фракталом называется самоподобное геометрическое множество точек, геометрическая размерность которого не совпадает с фрактальной размерностью.

Таким образом, отрезок, квадрат и куб – не фракталы, тогда как канторово множество, кривая Кох, салфетка и ковер Серпинского служат примерами фракталов.

## *Фракталы на комплексной плоскости*

В основе изучаемых нами комплексно-динамических объектов на комплексной плоскости лежат итерации рациональных отображений, т.е. итерации, задаваемые отображениями вида $R(z)=P(z)/Q(z)$, где $P$ и Q – полиномы, не имеющие общих делителей.

Изучением свойств таких отображений еще в начале XX в. занимались французские математики Гастон Жюлиа (18931978) и Пьер Фату (1878 1929). Но их деятельность оставалась в основном неизвестной даже для большинства математиков, поскольку в отсутствие современной компьютерной графики было почти невозможно передать их тонкие идеи. Лишь после того, как Бенуа Мандельброт в 1980 г. построил на экране компьютера чрезвычайно красивое изображение множества, начался настоящий бум, как в среде профессионалов, так и любителей математики.

Вызвано это тем, что воспроизвести на экране современного компьютера изображение любого из множеств Жюлиа или Мандельброта настолько просто, что по силам любому желающему. С другой стороны, получающиеся картины фантастически красивы и неожиданны.

Классическое множество Мандельброта и соответствующие ему множества Жюлиа получаются из простейшей (с математической точки зрения) формулы $z_n = z^2_{n-1} + c$, где $c$– комплексная постоянная, а $n$ принимает любое натуральное значение.

Выбрав какую-либо точку $z_0$ и воспользовавшись данной индуктивной формулой, получим на комплексной плоскости последовательность точек $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \ldots$

Рассмотрим простейшее из возможных значений константы $c$, а именно $c=0$. Тогда при каждой итерации вычисляется точный квадрат: $z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow z_0^8 \rightarrow \ldots$ Для этой последовательности в зависимости от $z_0$ имеются три очевидные возможности:

1) для точки $z_0$, модуль которой меньше 1, последовательность $z_0, z_0^2, z_0^4, \ldots$ стремится к нулю. Мы говорим, что нуль является аттрактором для процесса. (Более подробно об аттракторах рассказано в статье В.В. Жикова);

2) точка комплексной плоскости $z_0$, с модулем $|z_0| > 1$, «запускает» итерационный процесс, который убегает в бесконечность, т.е. элементы последовательности $\{zn\}$ таковы, что их модули становятся все больше и больше. Можно сказать, что бесконечность также есть аттрактор для этого процесса;

3) точка комплексной плоскости, лежащая на единичной окружности с центром в начале координат, т.е. точка с модулем, равным единице, характеризуется тем, что элементы ее последовательности продолжают оставаться на расстоянии 1 от нуля.

Ситуация прояснилась. Плоскость делится на две зоны влияния, а граница между ними – окружность.

В общем случае для ненулевого с поведение последовательности $z_\nu = z^2_{\nu-1} + c$ зависит от параметра с и начальной точки. Если точка $z_0$ находится далеко от нуля, то ее последовательность будет быстро стремиться к бесконечности. Это, конечно, верно также не только для начальной точки $z_0$, но и для точки $z_\nu$ с любым номером ν. Так, если $|z_\nu| \geq |c| + 2$, то уже величина $|z_{\nu+12}|$ окажется чудовищно велика.

Но, как видно из предыдущего примера, существуют и такие значения $z_0$, для которых последовательность $\{z_n\}$ не уходит далеко, а остается ограниченной по модулю. Говорят, что эти значения образуют наполненное множество Жюлиа $K_c$ для полинома $f(z).= z^2 + c$.

**Определение 4.** *Множеством Жюлиа называют граничные точки $K_c$..*

Если наполненное множество Жюлиа $K_c$ не имеет внутренних точек, то оно совпадает со своей границей и множество Жюлиа совпадает со своим наполненным множеством Жюлиа.

Естественно, что вид множества Жюлиа зависит от выбора параметра $c$, но удивляет то, насколько эта зависимость сильна. Меняя $c$, можно получать невероятное разнообразие множеств Жюлиа. Вот как описывает их А. Дуади: «Одни из них похожи на большие толстые тучи, другие напоминают редкие кусты ежевики, третьи выглядят, как искры, летящие в небе во время фейерверка. Одно множество имеет форму кролика, у многих других хвосты, как у морского конька»

Оказывается, множества Жюлиа – это фракталы: они сильно изломаны и большинство из них обладает свойством самоподобия.

Все множества Жюлиа либо состоят из несвязных между собой кусков, либо представляют собой цельное множество. Такие цельные множества мы будем называть связными, если любые две их точки соединяются линией, не выходящей из данного множества.

Последнее замечание приводит нас к определению множества Мандельброта.

**Определение 5.** *Множеством Мандельброта М называется множество тех значений параметра c, для которых наполненное множество Жюлиа связно* (рис.5).

Из результатов Жюлиа и Фату следует критерий, который делает задачу построения изображения множества Мандельброта на экране компьютера элементарной.

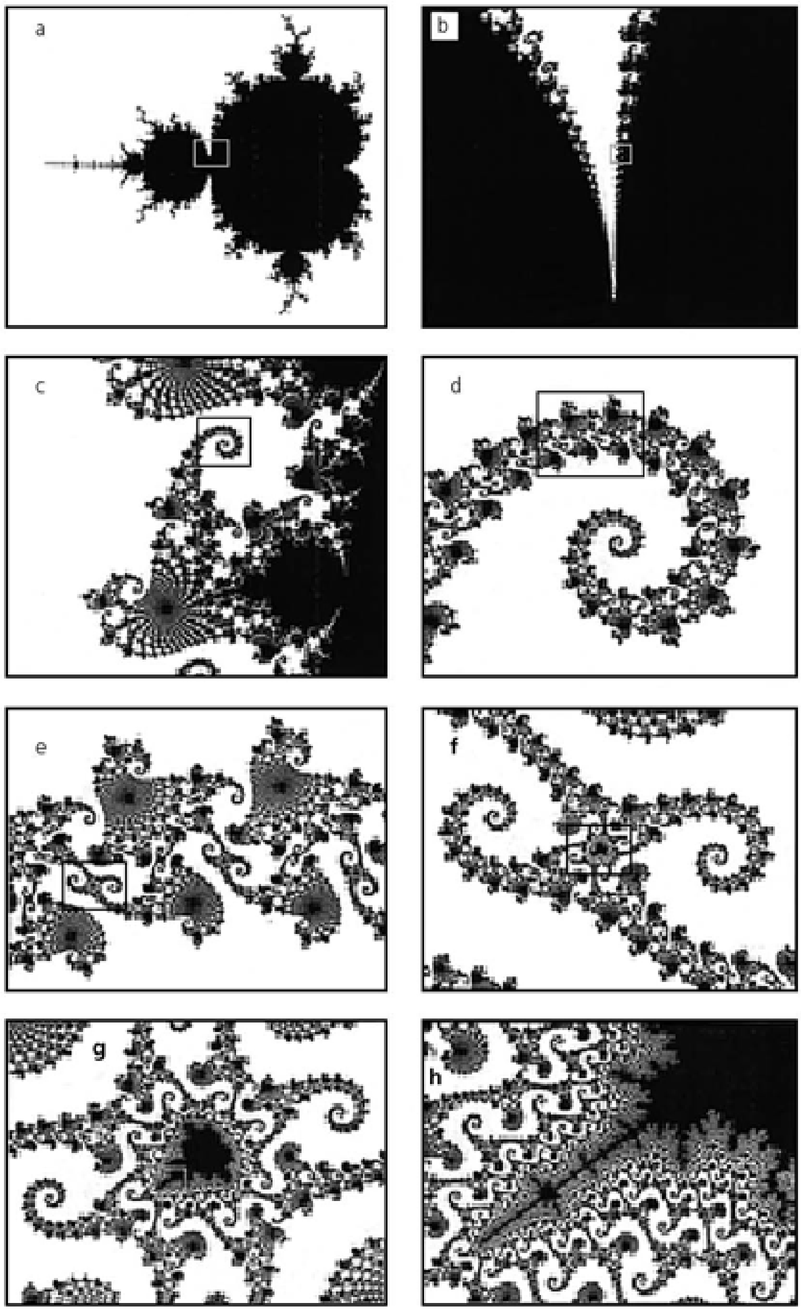


*Рис.5. Классическое множество Мандельброта М и его части.*

**Теорема 1.** *Точка c комплексной плоскости принадлежит множеству Мандельброта М тогда и только тогда, когда последовательность* $\{z_n\}$, *где* $z_n = z^2_{n-1} + c$ *остается ограниченной, если ее первый член* $z_0 = 0$.

Если взглянуть на множество Мандельброта, то первое, что бросается в глаза, – это область, ограниченная кардиоидой с острием в точке 0,25 и за кругленной вершиной в точке 0,75. Затем виден касательный к кардиоиде круг радиусом 0,25 с центром в точке 1 и бесчисленное множество меньших областей, которые также касательны к кардиоиде. К каждому из этих компонентов в свою очередь прикреплены еще меньшие и т.д. Все компоненты связаны с главной кардиоидой с помощью нитей, которые разветвляются, образуя очень сложные узоры. Благодаря нитям множество М оказывается связным.

Вместе с тем множество Мандельброта М не самоподобно: М действительно содержит бесконечное число малых копий самого себя, и, следовательно, в каком бы месте ни взглянуть на границу М в микроскоп, увидим некоторые из малых копий М. Но эти копии вплетены в сеть нитей, вид которых зависит от того, в какой точке смотреть. Более того, если рассматривать две копии сравнимого размера, то отношение расстояния между ними к их размеру будет сильно зависеть не только от точки, в которой мы наблюдаем, но и от увеличения микроскопа.

Очевидно, что каждому значению с соответствует множество Жюлиа, и для тех точек с, которые не лежат в множестве Мандельброта М, соответствующее множество Жюлиа несвязно.

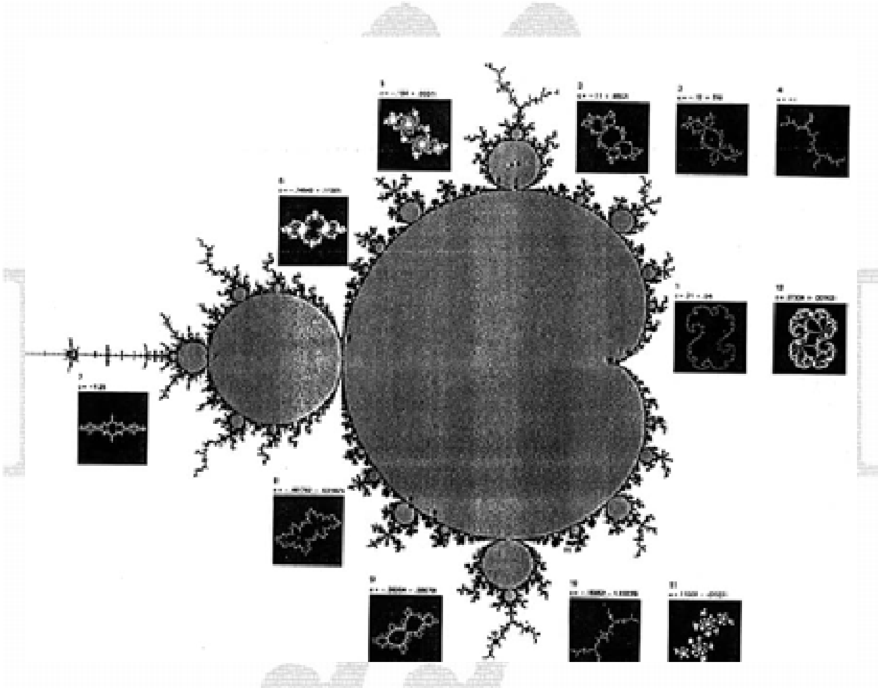

*Рис.6. Зависимость формы множеств Жюлиа от расположения с на множестве Мандельброта.*

На самом деле можно сделать нечто вроде фильма, иллюстрирующего изменение множеств Жюлиа в зависимости $c$. Проведем отрезок в $c$ плоскости, начинающийся внутри множества Мандельброта $M$ и заканчивающийся вне его. По мере приближения к границе $M$ соответствующие множества Жюлиа становятся все более сжатыми, постоянно уменьшаясь в размере, а когда точка $c$ достигнет границы $M$, множество Жюлиа сожмется до хрупкого дендритного скелета. Когда $c$ выйдет за границу множества Мандельброта, сопутствующее ему множество Жюлиа как бы взорвется, превратившись в канторову пыль, называемую пылью Фату. Эта пыль становится все мельче с удалением точки $c$ от $M$ (рис.6).

Простые черно-белые картины не дают полное представление о поведении точек плоскости. Сложную динамическую структуру множеств Мандельброта и Жюлиа можно адекватно отразить только в цвете (см. рис.7). Один из способов получения цветных изображений состоит, на пример, в том, что цвет точки выбирается в зависимости от ее скорости убегания к своему аттрактору. Конечно, это требует длительного экспериментирования на графическом терминале, что само по себе – задача интереснейшая.

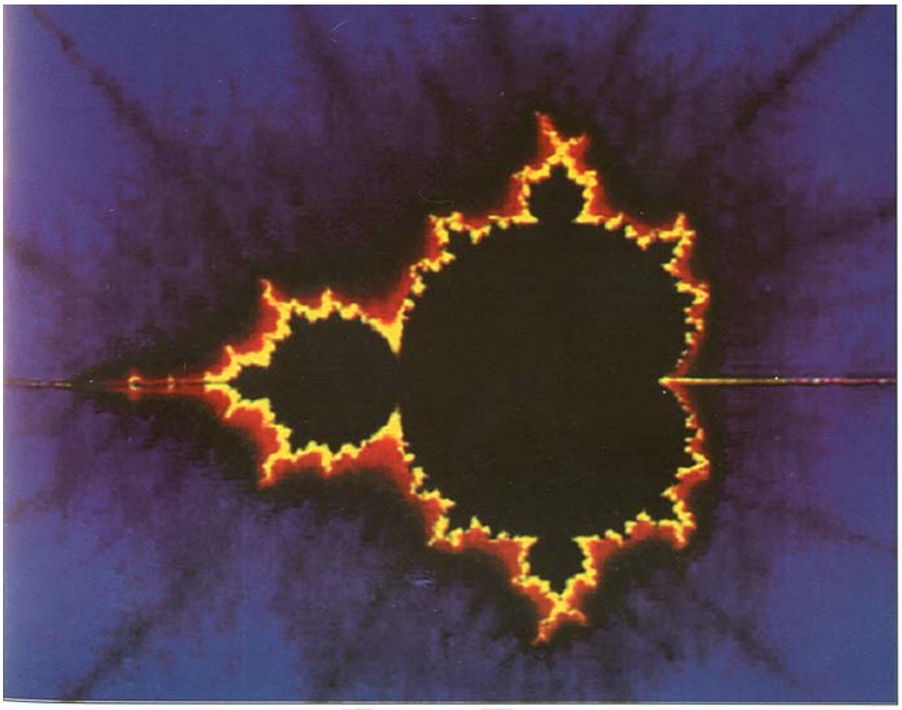

*Рис.7 Часть множества Мандельброта*

## *Множества Фату*

Еще более фантастическими получаются изображения многомерных комплексных объектов. Конечно, на плоский экран компьютера сложно вывести даже картинку из $c^2$, поскольку оно эквивалентно четырехмерному действительному пространству. Но даже трехмерные сечения областей сходимости для некоторых итерационных процессов, таких как трехмерное сечение четырехмерного множества Мандельброта, способны доставить огромное эстетическое удовольствие (рис.8).

Однако мы разберем несколько иной аспект многомерных отображений. Связан он с тем, что по ряду своих характеристик многомерные комплексные пространства $c^n$ принципиально отличаются от одномерной комплексной плоскости. Эта ситуация не существует в действительном анализе, где можно говорить о сохранении свойств функций одного действительного аргумента для аналогичных функций, зависящих от нескольких переменных.

Чтобы ближе разобраться с этим феноменом, введем понятие голоморфной функции. Для этого рассмотрим функцию *f*, зависящую от двух действительных аргументов *x* и *y*. Если мы попытаемся выразить их через комплексные числа, то, пользуясь формальным правилом,

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

получим функцию f(z, z).

**Определение 6.** Функция $f(z, \overline{z}): C \; C,$ называется голоморфной в области D, если в некоторой окрестности любой точки D выполняется условие Коши-Римана

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0, \; \text{т.е.}\, f = f(z).$$

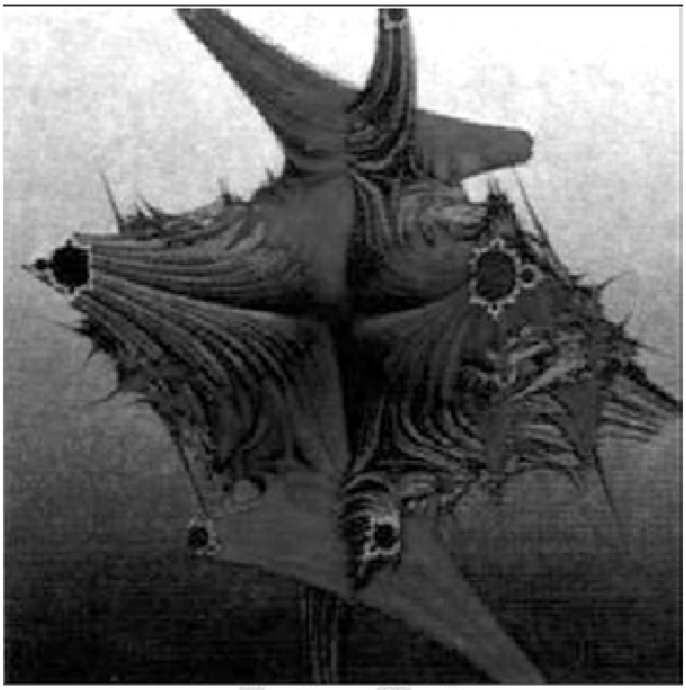

*Рис.8. Трехмерное сечение множества Фату.*

Голоморфные функции обладают рядом замечательных свойств: любая из них бесконечно дифференцируема, и более того, аналитична, т.е. может быть разложена в степенной ряд.

Функция $f(z_1, \dots , z_n)$, зависящая от нескольких комплексных переменных $z_1, \dots , z_n$, называется голоморфной, если она голоморфна по каждой своей переменной. Согласно теореме Хартогса, она чудесным образом оказывается и бесконечно гладкой, и аналитичной. Это удивительно, так как в действительном случае функция, дифференцируемая по каждому своему аргументу, не обязана быть даже непрерывной.

Отображение $F = F(z_1, \dots , z_n)$, действующее из комплексного пространства $C^n$ в себя, мы будем называть голоморфным, если оно задается голоморфны ми функциями. Очевидно, что любая голоморфная функция $f = f(z)$ задает голоморфное отображение комплексной плоскости в себя.

Если голоморфное отображение $F$ взаимно-однозначно, то будем называть его биголоморфным. Любое биголоморфное отображение на одномерной комплексной плоскости комформно, то есть сохраняет углы между кривыми в любой точке области определения.

Интереснейший вопрос, связанный с геометрией комплексных пространств: во что можно деформировать ту или иную область $D$ при помощи биголоморфных отображений? Дело в том, что все деформированные области имеют одинаковые основные свойства и могут считаться эквивалентными.

Так, например, все односвязные области комплексной плоскости, т.е. области со связной границей, биголоморфно эквивалентны между собой и эквивалентны единичной окружности. В многомерном случае ситуация принципиально иная: эквивалентность двух наперед заданных областей $D$ и $G$ является исключением, и любое, даже сколь угодно малое, изменение области $D$ делает ее неэквивалентной первоначальной.

Наконец, отличие, на котором мы остановимся подробнее, состоит в том, что вся комплексная плоскость биголоморфно может быть отображена только на самою себя и ни на какую другую область. Причем биголоморфное отображение плоскости может быть только линейным. Для многомерных пространств ситуация принципиально иная. Во-первых, существуют нелинейные биголоморфные отображения пространств на себя. Во-вторых, уже в пространстве $C^2$ существуют области, не совпадающие со всем пространством $C^2$, но которые при этом могут быть биголоморфно отображены на пространство $C^2$. Впервые пример такой области в 1922 г. был построен Пьером Фату. С тех пор они получили его имя.

Области Фату получаются как области сходимости итерационных процессов некоторых рациональных отображений. Таким образом, области Фату – это области фрактального типа, изображения которых можно получить, используя компьютерную графику.

Для тех, кто желает самостоятельно исследовать области Фату, приведем конструкцию, предложенную в 1991 г. Э. Бедфордом и Д. Смайли. Для этого рассмотрим отображение $F(z,w) = (f1(z,w), f2(z,w))$, действующее из $C^2$ в $C^2$ по правилу

$$f_1(z,w) = \alpha\cdot z + (\beta\cdot w + z^2)^2,$$

$$f_2(z,w) = \beta\cdot w + z^2,$$

где действительные параметры α и β таковы, что $|\alpha|, |\beta|<1$. Для каждой точки $(z_0,w_0)$ рассмотрим итерационный процесс $(z_{n+1},w_{n+1}) = F(z_n,w_n)$. Верна следующая теорема.

**Теорема 2.** *Множество точек* $(z_0,w_0)$, *для которых соответствующая последовательность* $\{(z_0,w_0)\}$ *при итерационном процессе* $(z_{n+1},w_{n+1}) = F(z_n,w_n)$ *сходится к нулю, образует множество Фату.*

Очевидно, что для различных α и β получаются различные множества Фату. Однако большинство из них представляет собой массивное тело в окрестности начала координат, от которого в бесконечность, причудливо переплетаясь, уходят щупальца. Построение разных сечений областей Фату – увлекательная исследовательская задача, которая может быть предложена любому желающему.

*ЛИТЕРАТУРА*


1 *Жиков В.В. Фракталы // Сорос. образоват. журн. 1996. №12. С.109117.*
2 *Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., 1993.*
3 *Peitgen H.O., Saupe D. The Science of Fractal Images. N.Y.: Springer Verlag, 1988.*
4 *Федер Е. Фракталы. М., 1991.*
5 *Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.2. М., 1985.*
6 *Дьюдни А.К. Множество Мандельброта и родственные ему множества Жюлиа // В мире науки. 1988. №1. С.8893.*
7 *Rudin W., Rosay J.P. Holomorphic maps from $C_n$ to $C_n$ // Trans. AMS. 1988. V.310. P.4786.*
8 *Carleson L., Gamelin T. Complex Dynamics. N.Y., 1993.*
9 *Еременко А.Е., Любич М.И. Динамика аналитических преобразований // С. Петербургский мат. журн. 1990. №1. С.563633.*