ЭТА СТРАННАЯ КИНЕТИКА

В.В. Учайкин

Владимир Васильевич Учайкин, доктор физико-математических наук, профессор Ульяновского государственного университета. Руководитель проектов 00-01-00284 и 00-02-17507.

В 1827 г. шотландский ботаник Р. Браун, наблюдая хаотическое движение частиц пыльцы в капле воды, открыл новый тип движения, названный позднее его именем, — броуновское движение [1]. Сто лет спустя оно стало объектом интенсивных исследований физиков и математиков. Физики обнаружили, что броуновское движение совершают молекулы в газах, электроны и дырки в полупроводниках, нейтроны в ядерных реакторах, кванты света в атмосферах планет. Математики на примере броуновского движения построили теорию случайных процессов. Диффузионная (по физической терминологии) модель использовалась при описании химических, биологических, экологических процессов. Основные законы броуновского движения — гауссова форма диффузионного пакета и его расплывание по закону $t^{1/2}$ — казались столь же универсальными (хотя, понятно, не столь фундаментальными), как и законы Ньютона.

Однако в 1926 г. Л. Ричардсон [2] обнаружил, что в условиях турбулентной среды диффузионный пакет расплывается по закону $t^{3/2}$. Позднее этот процесс был назван *супердиффузией*. Другой тип отличной от нормальной диффузии — *субдиффузия* (замедленная диффузия) — был обнаружен в перколяционных процессах, релаксации твердых материалов, в полимерных структурах, других явлениях и системах. Оказалось, что не только закон расширения, но и сама форма диффузионного пакета и тип уравнения, описывающего эти процессы, существенно отличаются от нормального случая. Этот класс явлений был назван *аномальной диффузией* или *странной кинетикой*.

В чем проблема?

К настоящему времени накоплено большое число экспериментальных данных о разнообразных аномальных процессах диффузии. В их числе — перенос зарядов в аморфных полупроводниках, ЯМР-диффузометрия в перколятивных и пористых системах, динамика полимерных систем, перенос на фрактальных структурах, диффузия во вращающихся потоках, «скользящая» диффузия по твердой поверхности, диффузия в пористых стеклах, в неоднородном скальном грунте, в квантовой оптике, в плазме и др. [3—5].

Для описания этих процессов было развито несколько подходов, использующих переменные коэффициенты диффузии [6], корреляции дробного порядка [7], дробные лапласианы [8], скачкообразные блуждания [9], обобщения уравнений Ланжевена [10], Фоккера—Планка [11], термодинамический подход [12] и др. (см. [13—17]).

В 90-х годах прошлого века стало ясно, что важное место в теории аномальной диффузии занимают уравнения дробных производных, и в простых одномерных случаях их решения выражаются через *H*-функции — функции Фокса, обобщающие известные *G*-функции Мейера [18]. Ряд вопросов, однако, оставался неясным. В частности, нельзя ли вывести основные уравнения аномальной диффузии из некоторого общего принципа, не прибегая каждый раз к конкретным моделям? Как решения уравнений с дробными производными связаны с более известными и изученными функциями, чем *H*-функции? Каковы их свойства и свойства описываемых ими процессов? Как выглядит многомерная аномальная диффузия — на плоскости, в пространстве?

Дадим краткое описание проблемы и полученных результатов.

Шаг назад — к Эйнштейну

Босоногое наше детство научило нас: чтобы преодолеть преграду, перепрыгнуть ее, надо разбежаться, чтобы разбежаться — надо сделать несколько шагов назад. Вот и мы сейчас сделаем шаг назад — к уравнению нормальной диффузии

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D\Delta p(\mathbf{x}, t), \qquad (1)$$

выведенному А. Эйнштейном и М. Смолуховским [19]. В уравнении (1) $p(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}$ — вероятность того, что совершающая броуновское движение частица в момент времени t окажется в элементе $d\mathbf{x}$ рассматриваемого пространства.

Вывод уравнения диффузии из первых принципов (уравнений динамики) довольно сложен, в чем легко убедиться, взяв в руки любой серьезный учебник по статистической механике. Но дело даже не в этом: в процессе вывода уравнения, описывающего необратимый процесс диффузии, из уравнения, описывающего обратимое движение динамической системы, непременно необходимо где-то сделать разрыв связующей нити, допущение, необходимое для получения желаемого результата, но недоказуемое (за исключением специальных моделей).

В то же время тот факт, что совершенно различные по природе явления описываются одинаковыми уравнениями, является прямым указанием на то, что дело здесь не в конкретном механизме явления, а в некотором общем качестве, которым обладает весь класс подобных явлений. Формулировка этого качества в виде аксиом или определений позволяет освободить картину от деталей, не влияющих существенно на ход процесса, и исследовать полученную модель «в чистом виде».

Простейший вывод уравнения диффузии, основанный на уравнении непрерывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} \qquad (2)$$

и законе Фика

$$\mathbf{j} = -D\,\nabla p, \qquad (3)$$

казалось бы, не оставляет места для какой-нибудь альтернативы. Создается впечатление, превратившееся для многих в убеждение, что никаких других результатов кроме очевидных модификаций (неоднородная среда, внешние поля, различные типы диффундирующих частиц) в рамках линейной диффузии уже не получить, — все абсолютно ясно и прозрачно. В этом есть свой резон, но природа всегда богаче воображения, и давно уже замечено, что уравнения (или эквивалентные им принципы) могут содержать значительно больше информации, чем это представляется на первый взгляд.

В данном конкретном случае проблема заключается в том, что обобщаться может феноменологический закон Фика (3), а не уравнение непрерывности, которое является (для непрерывно движущихся частиц) фундаментальным законом сохранения. Обобщение же этого закона далеко не очевидно и имеет смысл поискать более подходящее для обобщений свойство диффузионного процесса.

Прорыв в бесконечность

По слухам, П.А.М. Дирак говорил, что он лишь тогда начинает понимать уравнение, когда узнает его решение. Пуассон вывел знаменитое свое уравнение на основе известного уже решения. Воспользуемся и мы этим приемом — будем обобщать не уравнение, а его решение. При начальном условии $p(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x})$ оно имеет вид

$$p(\mathbf{x}, t) = (4\pi Dt)^{-d/2}\exp\{-r^2/4Dt\}, \qquad (4)$$

где $r = |\mathbf{x}|$, а d — размерность рассматриваемого пространства.

Отметим три особенности этого решения. Во-первых, оно однородно — в том смысле, что описывает однородный во времени и пространстве процесс:

$$p(\mathbf{x}, t_1 + t_2) = \int p(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t_1)p(\mathbf{x}', t_2)d\mathbf{x}', \qquad (5)$$

во-вторых — автомодельно:

$$p(\mathbf{x}, t) = t^{-d/\alpha}\, g(\mathbf{x}t^{-1/\alpha}), \quad \alpha > 0, \qquad (6)$$

и, в-третьих — обладает конечной дисперсией:

$$\int |\mathbf{x}|^2 p(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} < \infty. \qquad (7)$$

Справедливо и обратное: если мы зададим процесс свойствами (5)—(7), то с необходимостью придем к распределению (4), удовлетворяющему уравнению (1). Значение показателя подобия $\alpha = 2$ при этом тоже определяется однозначно. Таким образом, (5)—(7) можно рассматривать как три постулата (три аксиомы), определяющие рассматриваемый процесс. Процедура обобщения в такой постановке сводится к отказу от одной или даже двух аксиом, ограничивающих рассматриваемый класс процессов.

Перейдем от плотностей вероятностей $p(\mathbf{x}, t)$ к их образам Фурье,

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t) = = \int e^{i\mathbf{kx}} p(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x},$$

в теории вероятностей называемым характеристическими функциями. Тогда формулы (5) и (6) примут вид

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t_1 + t_2) = \tilde{p}(\mathbf{k}, t_1)\tilde{p}(\mathbf{k}, t_2), \qquad (8)$$

и

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t) = \tilde{g}(\mathbf{k}t^{1/2}). \qquad (9)$$

Объединяя оба эти равенства, получаем уравнение

$$\tilde{g}((t_1 + t_2)^{1/\alpha}\mathbf{k}) = \tilde{g}(t_1{}^{1/\alpha}\mathbf{k})\tilde{g}(t_2{}^{1/\alpha}\mathbf{k}). \qquad (10)$$

Его решения, обладающие свойствами характеристических функций, порождают класс специальных распределений, различающихся между собой значением характеристического показателя α € (0, 2] и некоторыми другими параметрами. Значение $\alpha = 2$ соответствует гауссову распределению, значения $\alpha < 2$ порождают бесконечное множество других распределений. Важнейшим отличием их от гауссова распределения является бесконечность дисперсии.

Открытие этого класса распределений, названных устойчивыми, является важнейшей вехой истории теории вероятностей двадцатого века. Дело в том, что они и только они могут служить предельными распределениями в схеме суммирования независимых случайных величин. Наиболее известное из них — гауссово — непосредственно связано с центральной предельной теоремой.

Устойчивые распределения

Если взять сумму двух независимых случайных векторов с каким-либо одинаковым законом распределения, то результатом тоже будет случайный вектор с иным, в общем случае, непохожим на исходный законом распределения. Если же слагаемые распределены по устойчивому закону, то и результат (с точностью до масштабного преобразования) имеет то же распределение. Этим и объясняется происхождение самого термина. В зарубежной литературе отличные от гауссова устойчивые распределения часто называют распределениями Леви или, если речь идет о многомерных распределениях, — распределениями Леви—Фельдгейма.

Наиболее изученными многомерными устойчивыми распределениями являются симметричные, точнее, центрально-симметричные, для которых $g(\mathbf{x}) = g(-\mathbf{x})$. Подмножеством симметричных распределений являются изотропные распределения, характеристическая функция которых имеет вид

$$\tilde{g}(\mathbf{k}, \alpha) - \exp\{\ |\mathbf{k}|^{\alpha}\}.$$

При $\alpha = 2$ мы узнаем здесь характеристическую функцию изотропного гауссова распределения (4), $\alpha = 1$ соответствует d-мерному распределению Коши

$$g(\mathbf{x}, 1) = \Gamma((d+1)/2)[\pi(1+r^2)]^{-(d+1)/2}, \qquad r \equiv |\mathbf{x}|.$$

Остальные изотропные плотности не выражаются через элементарные функции.

Как уже говорилось выше, дисперсия, а, следовательно, и все высшие моменты устойчивых распределений бесконечны — это связано с поведением хвостов плотностей на больших расстояниях. В отличие от нормального случая, при $\alpha \neq 2$

$$g(\mathbf{x}, \alpha) \propto r^{-\alpha-d}, \qquad r > \infty.$$

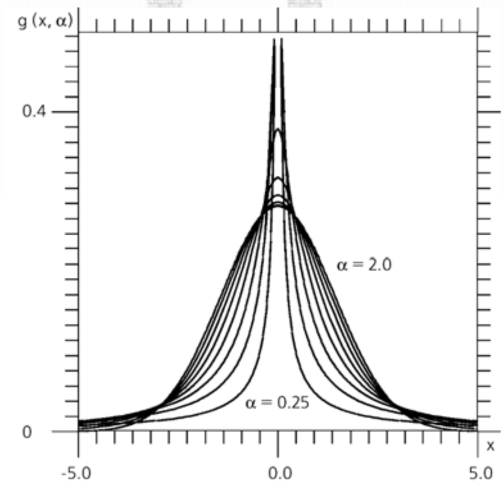

Рис.1. Плотности одномерных симметричных устойчивых распределений ($\alpha = 2$ — распределение Гаусса).

Еще одна важная особенность негауссовых изотропных распределений: проекции X_1, ..., X_d описываемых ими случайных векторов $\mathbf{X}$ коррелируют между собой, корреляция исчезает только при α = 2. Характеристическая функция симметричного распределения вектора с независимыми компонентами имеет вид

$$\tilde{g}(\mathbf{k}, \alpha) = \exp\{-|k_1|^{\alpha} - \ldots - |k_d|^{\alpha}\}.$$

При значениях характеристического показателя α, отличных от 2 и 1, плотности симметричных устойчивых распределений находятся численными методами [20]. На рис.1 показано семейство одномерных симметричных устойчивых плотностей, на рис.2 — двумерные распределения первого (изотропного) и второго (с независимыми компонентами) типов.

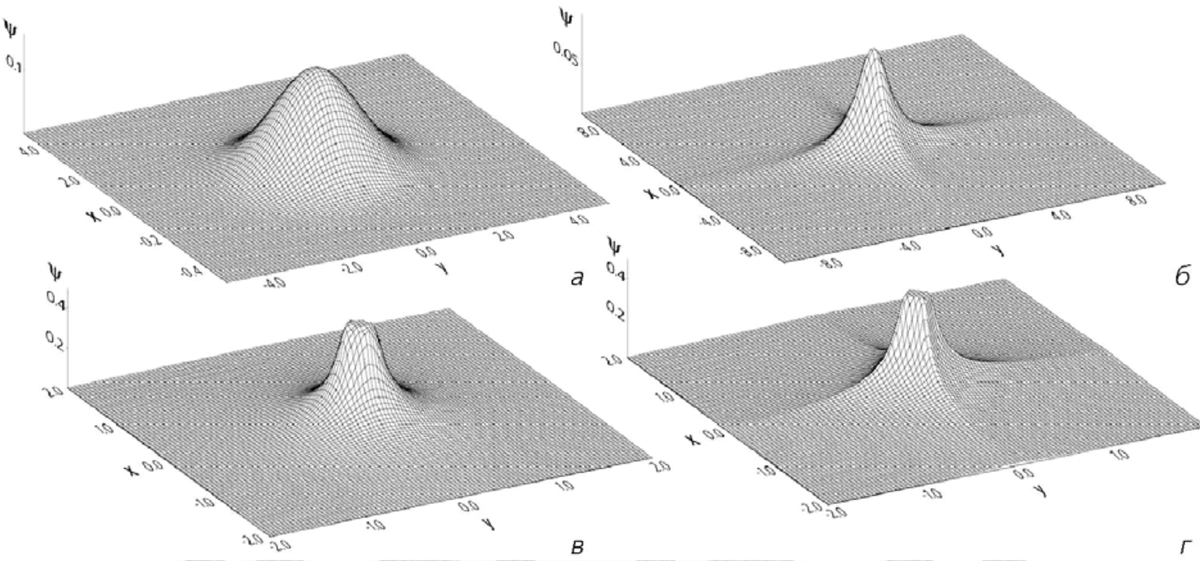

Рис.2. Двумерные дробно-устойчивые распределения $\Psi^{(\alpha,\,\beta)}$: а) α = 1, β = 1 — изотропное; б) α = 1, β = 1 — с независимыми компонентами; в) α = 1, β = 1/2 — изотропное; г) α = 1, β = 1/2 — с независимыми компонентами.

От Брауна к Леви...

Теперь мы будем рассматривать лишь изотропные распределения, поскольку вся информация о распределениях второго типа в силу независимости компонент может быть извлечена из одномерного симметричного распределения. При описании устойчивых плотностей мы специальным образом выбрали масштабный множитель. Откажемся сейчас от этого ограничения и запишем характеристическую функцию $\tilde{g}$ в виде

$$\tilde{g}(\mathbf{k}, \alpha) = \exp\{-D|\mathbf{k}|^{\alpha}\},$$

где D — положительная постоянная.

Согласно постулату однородности, характеристическая функция $\tilde{p}$ плотности p принимает вид

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t) = \exp\{-Dt|\mathbf{k}|^{\alpha}\},$$

приводящий к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -D|\mathbf{k}|^{\alpha}\tilde{p}(\mathbf{k}, t) \qquad (11)$$

с начальным условием $\tilde{p}$ (k, 0) = 1.

Чтобы получить уравнение для $p(\mathbf{x}, t)$, осталось выполнить обратное преобразование Фурье. В случае α = 2 оно легко выполняется с помощью широко известного соответствия

$$-|\mathbf{k}|^2 \Leftrightarrow \Delta,$$

и мы приходим к обычному уравнению диффузии (1), описывающему броуновское движение. При α ≠ 2 надо ответить на вопрос

$$-|\mathbf{k}|^\alpha \Leftrightarrow \ ?$$

Ответ дается теорией дробного интегродифференцирования [21]:

$$-|k|^\alpha \Leftrightarrow -(-\Delta)^{\alpha/2}. \qquad (12)$$

Конструктивное определение лапласиана в дробной степени читатель может найти в только что цитированной работе. Нам же оно сейчас ни к чему: мы не собираемся вычислять дробные производные и поэтому можем принять соответствие (12) за *определение дробного лапласиана* (что, впрочем, недалеко от строгого определения). Тогда уравнение (11), точнее, его Фурье-обращение примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} p(\mathbf{x}, t)$$

с начальным условием $p(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x})$. Последнее, впрочем, можно включить в само уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} p(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x})\delta(t). \qquad (13)$$

Его решение уже известно нам:

$$p(\mathbf{x}, t) = t^{-d/2} g(\mathbf{x}t^{-1/\alpha}, \alpha).$$

При α ≠ 2 оно описывает процесс, называемый Леви-движением.

Отметим основные особенности Леви-движения [22]:

1) дисперсия пространственного распределения бесконечна (и поэтому не может служить характеристикой ширины диффузионного пакета);

2) ширина диффузионного пакета (определяемая, например, с помощью фиксированной вероятности или ширины на полувысоте) растет со временем пропорционально $t^{1/\alpha}$ — быстрее, чем в случае нормальной диффузии (рис.3—4);

3) траектории частиц $\mathbf{X}(t)$, выполняющих движение Леви, характеризуются разрывами первого рода, называемыми полетами Леви (Levy flights) (рис.4).

Эти признаки позволяют отнести Леви-движение к супердиффузионному режиму. Большие скачки могут объясняться наличием больших пустот во всех масштабах, что дает основание говорить о фрактальной структуре среды, в которой наблюдается рассматриваемый процесс.

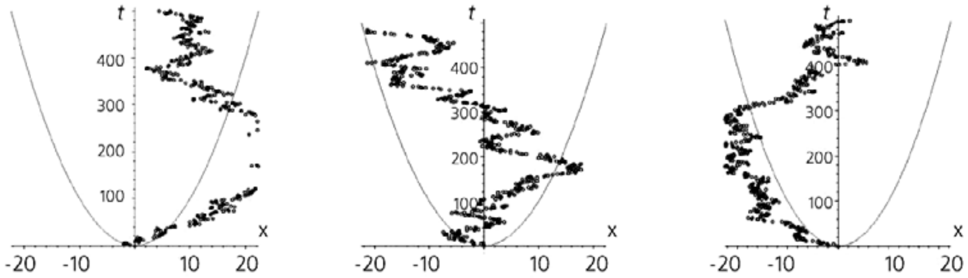

Рис.3. Типичные диффузионные траектории.

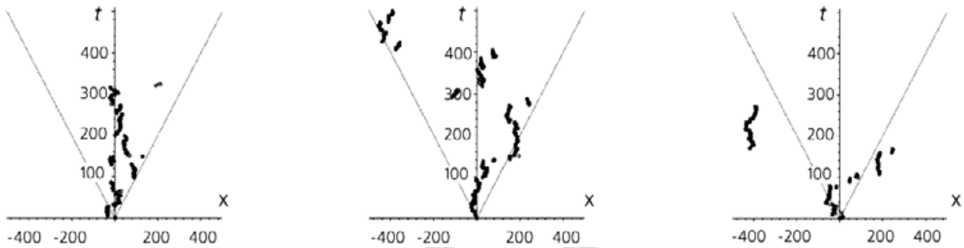

Рис.4. Типичные супердиффузионные траектории.

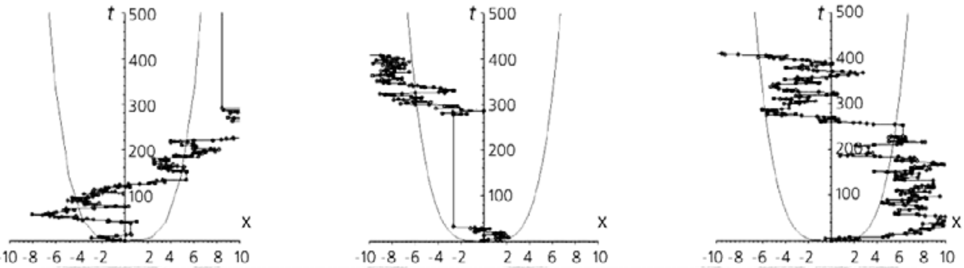

Рис.5. Типичные субдиффузионные траектории.

...и далее

Оглянемся назад. Постулаты об однородности, автомодельности и конечности дисперсии приводят единственным образом к броуновскому движению. Отказ от последнего постулата (конечности дисперсии) расширил класс процессов включением движения Леви, моделирующего супердиффузионной процесс. Теперь мы откажемся от однородности процесса, оставив автомодельность и сохранив «завоеванный» нами дробный лапласиан. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial^\beta p}{\partial t^\beta} = -D(-\Delta)^{\alpha/2}p(\mathbf{x}, t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\,\delta(\mathbf{x}), \qquad 0 < \beta \le 1, \tag{14}$$

где $\partial^\beta p/\partial t^\beta$ — производная Римана—Лиувилля дробного порядка β, определяемая формулой [21]

$$\frac{\partial^\beta p}{\partial t^\beta} = -D(-\Delta)^{\alpha/2}p(\mathbf{x}, t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\,\delta(\mathbf{x}), \qquad 0 < \beta \le 1, \tag{14}$$

Решение же уравнения (14) может быть представлено в виде

$$p(\mathbf{x}, t) = (Dt^\beta)^{-d/2}\,\Psi^{(\alpha,\beta)}((Dt^\beta)^{-1/\alpha}\mathbf{x}), \tag{15}$$

где

$$\Psi^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty g_1^+(t, \beta)\,g(\mathbf{x}t^{\beta/\alpha}, \alpha)\,t^{d\beta/\alpha}dt, \tag{16}$$

а $g_1^+(t, \beta)$ — односторонняя одномерная устойчивая плотность, сосредоточенная на положительной полуоси и стремящаяся (в обобщенном смысле) к $\delta(t-1)$ при $\beta \to 1$.

В наших работах [29—30] показано, что плотности $\Psi^{(\alpha,\beta)}$ описывают распределение отношения d-мерного симметричного устойчивого вектора с характеристическим показателем α к не зависящей от него положительной случайной величине с плотностью $g_1^+(t, \beta)$ в степени β/α. Ввиду этого предложено распределения $\Psi^{(\alpha,\beta)}$ называть *дробно-устойчивыми*. Отметим, что семейство устойчивых распределений входит в класс дробно-устойчивых как под множество, сами же дробно-устойчивые плотности через соотношение (15) представляют фундаментальные решения уравнений в частных производных дробного порядка (14).

Не имея возможности подробно описать происхождение уравнения (14) с его решением (15)—(16), отметим лишь, что к этому главному и конечному результату приводят различные пути: обобщение на основе двойного уравнения Фурье—Лапласа (14), асимптотическое поведение скачкообразного случайного процесса, введение случайного времени диффузии $T < t$, то есть переход к так называемым подчиненным процессам [23]. Последнее обстоятельство дает основания для того, чтобы назвать полученный процесс (точнее, класс процессов, плотность $p(\mathbf{x}, t)$ которых удовлетворяет уравнению (14)) *подчиненным Леви-движением*. Оно имеет следующие особенности.

1. Дисперсия конечна при $\alpha = 2$ и бесконечна при $\alpha \neq 2$ безотносительно к β.

2. Ширина диффузионного пакета растет пропорционально $t^{\beta/\alpha}$. При $\beta < 2\alpha$ мы имеем субдиффузионный режим, при $\beta > 2\alpha$ — супердиффузионный, при $\beta = 2\alpha$, $\alpha = 2$ — нормальный режим и при $\beta = 2\alpha$, $\alpha < 2$ — квазинормальный режим.

3. Траектории подчиненного Леви-движения характеризуются скачками (разрывами) не только вдоль координатных осей, но и вдоль оси времени, застревая в ловушках. Распределение времени пребывания в них имеет не экспоненциальный, а обратно-степенной вид, что дает основание говорить о немарковском процессе или процессе с памятью. Конкуренция между фрактальностью среды и ее памятью и определяет конкретный тип аномальной диффузии.

*** * ***

Читатель может заметить, что настоящая статья является результатом конкуренции логики и содержательности изложения. Я старался все-таки отдать предпочтение первому аспекту. Что касается результатов — их можно найти в публикациях, указанных в списке литературы. Вот некоторые из них: супердиффузия и движение Леви [24], субдиффузия и движение Леви [25], движение Леви [26], подчиненное Леви-движение [27, 28], свойства и таблицы многомерных аномальных диффузионных распределений [29, 30], моделирование аномальной диффузии [30—32], связь с дифференциальными уравнениями [33], влияние конечной скорости свободного движения [34—38]; примеры применения аномальных блужданий к моделированию фрактальных и фракталоподобных сред [38—42], процессов переноса в них [43—48]. Много относящихся к рассматриваемой проблеме результатов собрано в нашей, к сожалению, малодоступной книге [20].

Надеюсь, что данный (разумеется, далеко не исчерпывающий проблему) обзор хоть в некоторой степени будет способствовать распространению новых идей.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Brown R. // Phil. Mag. 1828. V.4; Ann. Phys. Chem. 1828. V.14. P.294.*
2 *Richardson L.F. // Proc. Roy. Soc. 1926. V.110. P.709.*
3 *Bouchaud J.-P., Georges A. // Phys. Rev. A. 1990. V.41. P.1156.*
4 *Isichenko M.B. // Rev. Mod. Phys. 1992. V.64, №4. P.961.*
5 *Shlesinger M.F., Zaslavsky G.M., Klafter J. // Nature. 1993. №363. P.31.*
6 *O'Shaugnessy B., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. 1985. V.54. P.455.*

7 Mandelbrot B.B. The Fractional Geometry of Nature. New York, 1983.
8 Монин А.С. // ДАН СССР. 1955. Т.105, №2. С.256.
9 Scher H., Montroll E.W. // Phys. Rev. B. 1975. V.12. P.2455.
10 Seshadri V., West B.J. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1982. V.79. P.4501.
11 Zaslavsky G.M. // Physica D. 1994. V.76. P.110.
12 Tsallis C., Levy S.V.F., Souza A.M.C., Maynard R. // Phys. Rev. Lett. 1995. V.75. P.3589.
13 West D.J., Deering W. // Phys. Rep. 1994. V.246. P.6.
14 Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G. // Phys. Today. 1996. №49 (2). P.33.
15 Kutner R., Pekalski A., SznajdWeron (Eds.). Anomalous Diffusion, from Basics to Applicaions. Berlin, 1999.
16 Metzler R., Klafter J. // Phys. Rep. 2000. V.339. P.16.
1 Ben-Avraham D., Havlin S. Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems. Cambridge University Press, 2000.
2 Mathai A.M., Saxena R.K. The Hfunction with Applications in Statistics and Other Disciplines. New Delhi, 1978.
3 Эйнштейн А., Смолуховский М. // Брауновское движение / Ред. Давыдова Б.И. М., 1936.
4 Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications. Netherlands, Utrecht, 1999.
5 Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
6 Samorodnitzky G., Taqqu M.S. Stable Non-Gaussian Random Processes. New York, 1994.
7 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение. Т.2. М., 1967.
8 Золотарев В.М., Учайкин В.В., Саенко В.В. // ЖЭТФ. 1999. Т.115, №4. С.1411.
9 Учайкин В.В. // ЖЭТФ. 1999. Т.115, №6. С.2113.
10 Uchaikin V.V. // Intern. Journal of Theor. Phys. 1999. V.38. P.2375.
11 Uchaikin V.V. // Intern. Journal of Theor. Phys. 2000. V.39. P.2087.
12 Uchaikin V.V. // Physica A. 2002. V.259/1.
13 Kolokoltsov V., Korolev V., Uchaikin V. // J. Math. Sciences. 2001. V.105, №6. P.2569.
14 Uchaikin V.V. // J. Chem. Phys. 2002. V.88. P.1141.
15 Uchaikin V.V. // Emergent Nature. New Jersey, 2002.
16 Uchaikin V.V., Gusarov G.G. // Proc. of 3rd St.Petersburg Workshop on Simulation (June 28—July 3, 1998) / Eds.: Ermakov S.M., Kashtanov Y.N., Melas V.B. St.Petersburg, 1999. P.306.
17 Золотарев В.М., Учайкин В.В. // Теор. вер. и ее применение. 1999. Т.44, №1. С.176.
18 Учайкин В.В. // ТМФ. 1998. Т.115, №1. С.154.
19 Учайкин В.В. // ЖТФ. 1998. Т.68, №1. С.138.
20 Учайкин В.В. // Теор. вер. и ее применение. 1999. Т.44, №1. С.194.
21 Uchaikin V.V. // Physica A. 1998. V.255/1–2. P.65.
22 Uchaikin V.V., Gusarov G.G. // J. Math. Phys. 1997. V.38, №5. P.2453.
23 Учайкин В.В., Коробко Д.А. // Теор. вер. и ее применение. 1997. Т.42, №2. С.428.
24 Учайкин В.В., Гусаров Г.Г. // Известия вузов. Физика. 1997. №8. С.3.
25 Учайкин В.В., Коробко Д.А., Гисмятов И.Ф. // Известия вузов. Физика. 1997. №8. С.7.
26 Uchaikin V.V., Gusarov G.G., Gismjatov I.F., Svetukhin V.A. // Intern. Journal of Bifurcation and Chaos. 1998. V.8, №5. P.977.
27 Учайкин В.В., Коробко Д.А. // Ученые записки УлГУ. Серия физическая. 1998. Т.1 (4). С.3.
28 Учайкин В.В., Коробко Д.А. // Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов. Ульяновск, 1998. С.59.
29 Учайкин В.В., Коробко Д.А. // Письма в ЖТФ. 1999. Т.11. С.34.
30 Коробко Д.А., Учайкин В.В. // Ученые записки УлГУ. Серия физическая. 1999. Т.6. С.15.
31 Uchaikin V.V. // Paradigms of Complexity / Editor M. Novak. World Scientific, Singapore, 2000. P.41.
32 Учайкин В.В. // Известия вузов. Физика. 2000. Т.5. С.23.