Возникновение феномена и развитие теории гиперболических аттракторов коразмерности один

Р. В. Плыкин

Ромен Васильевич Плыкин, доктор физико-математических наук, соросовский профессор, профессор кафедры высшей математики Обнинского государственного технического университета атомной энергетики. Руководитель проекта 04-01-97204

Огромное счастье — открыть нечто неизвестное и интересное.
М. В. Ким, учитель математики средней школы №3 г. Ургенча

Всякий, посвятивший некоторой проблеме 300 вечеров подряд, решит ее.
Профессор М. Я. Антоновский, не следующий своим же высказываниям аспирантских лет

Рома, держитесь за примеры — они часто важнее теорем.
Профессор Ю. М. Смирнов

Творческая эволюция, или мысли о возникновении «нового»

Лет сто тому назад Лев Толстой в беседе с Николаем Лесковым заметил, что люди мало знают или оттого, что думают о том, что не дано знать (о боге, вечности, духе), или оттого, что думают над тем, о чем не стоит думать (о состояниях вещества, числах и т. д.). В этом высказывании содержится верное наблюдение: тупиковый вопрос порождается либо чрезмерной обобщательской претензией (чем грешат философы), либо чрезвычайно частной задачей (физика и математика не признавались великим писателем и зачислялись им в разряд необязательных частностей).

Однако существует трудный (почти тупиковый) вопрос, так или иначе неизбежный для каждого избравшего для себя приоритетной сферу открытия (в области научных изысканий или искусства): как возникает «новое»?

«Как у тебя это получается?» — спросил я у академика Я. Г. Синая — члена многих академий, в том числе и РАН. Ответ: «Пользуюсь методом проб и ошибок».

«Как это у Вас получается?» — спросил я у академика В. И. Арнольда — члена девяти академий, в том числе Французской и РАН. Ответ: «После неудавшейся попытки штурма проблемы встаю на лыжи в одних плавках, и к пятидесятому километру пробежки обычно приходит “момент истины”».

«Но почему примеры взяты из математического творчества?» — спросит критически настроенный читатель (почему бы не взять в собеседники нематематиков?). Обратимся к писательскому авторитету. Виктор Ерофеев в эссе «Музыка “живой жизни”», посвященном творчеству великого Альфреда Шнитке, пишет: «Гений тот, кто умеет считать. Шнитке видит мир как выражение точных математических пропорций. Они образуют ритм жизни, являя собой взаимодействие двух сущностных ритмов: ритма порядка, предопределенности и ритма случайностей, необузданной стихии. Если композитор подключается к этим ритмам, находит им музыкальный аналог, то его сочинение способно отразить адекватные “живой жизни” процессы».

Следует также отметить, что наиболее полные описания процессов творчества принадлежат философам, внесшим значительный вклад в математику (Р. Декарт, Г. В. Лейбниц), а также крупнейшим математикам, внесшим осязаемый вклад в философию и психологию (А. Пуанкаре, Ж. Адамар). Выдающийся исследователь процессов продуктивного мышления и один из создателей гештальт-психологии М. Вертгеймер [1] также считал, что наблюдения процедур решения математических задач приводят к пониманию проблемы творчества вообще. К сожалению, дальше наблюдений отдельных феноменов и отрывочных выводов эвристика — наука о творческом мышлении — не продвинулась, несмотря на внушительные успехи эвристического программирования шахматной игры и экономических решений, обязанные высоким скоростям реализации стандартных перечислительных алгоритмов в современной вычислительной технике. В сущности, на этом пути происходит перебор вариантов в рамках вышеупомянутого метода проб и ошибок, когда любой процесс решения проблемы состоит из случайных попыток, одна из которых и приводит к результату. Однако один из первопроходцев исследования творческого процесса Пуанкаре, описывая собственные переживания в процессе открытия теории автоморфных функций, заметил, что правильное решение может явиться как неожиданный подарок в момент, когда усилие мыследеятельности в направлении изучаемого вопроса прекращено, более того, решающая идея может всплыть из подсознания во сне, в момент засыпания или в момент пробуждения. Эти наблюдения показывают, что творческий процесс использует метод проб и ошибок как один из приемов, полное перечисление которых (и тем более теория) отсутствует.

Другую, отличную от метода проб и ошибок, точку зрения на творчество представляет гештальт-психология. Согласно этой науке, центральным моментом интеллектуального творчества является появление инсайта — озарения, связывающего воедино элементы поля проблемной ситуации. Таким образом, указанные Пуанкаре моменты спонтанных прозрений обретают статус закономерности. По Вертгеймеру [1], в процессе продуктивного мышления формируется поле, элементами которого являются вопросы, гипотезы, наблюдения, а также правильные частные утверждения или аксиомы. Среди элементов этого поля выделяются центральные элементы, составляющие фокус проблемы. Вокруг этого фокуса некоторые элементы проблемного поля связываются между собой в гештальт (целостную картину), составные части которого утрачивают самостоятельность. Инсайт и есть момент возникновения гештальта, который является основой нового видения ситуации, ведущего к решению частичной задачи или даже полной проблемы. В процессе исследования могут проявиться несколько гештальтов, может также появиться гештальт, отменяющий основную гипотезу изучаемой проблемы.

Процесс формирования проблемного поля вызывается, как правило, нерешенной задачей (проблемой) и сопровождается сознательными попытками ее решения, которые исчерпываются тривиальной усталостью. В соответствии с наблюдениями Пуанкаре, работа над задачей при этом не прекращается и переходит в бессознательную фазу (которая может осуществляться даже во сне или во время отвлекающих физических нагрузок — феномен Арнольда). Далее происходит чередование сознательной и бессознательной фаз, во время которых возникают новые связи (моменты инсайтов). Можно сказать, что первоначальная топология на конечном множестве элементов проблемного поля подвергается изменению путем ослабления за счет уменьшения семейства открытых множеств, равносильного увеличению компонент связности; кроме того, само поле пополняется новыми элементами. Одновременно может идти процесс сгущения-абстракции, равносильный отображению проблемного поля на новое, содержащее меньшее число элементов, но примерно с тем же семейством открытых множеств-кластеров. Эти процессы движутся за счет эстетических предпочтений, включающих в себя эмпатию как вложение творческого индивида с его ассоциативным опытом внутрь меняющегося проблемного поля. Решение задачи наступает в момент появления совершенного в эстетическом отношении поля, которое чудесным образом допускает логическую обработку в форму манускрипта. Попробуем прояснить эти соображения на примере продуктивной деятельности, приведшей к конструкциям гиперболических аттракторов и созданию теории.

Немного о геометрии и динамике

Идея динамической системы может быть объяснена в простейшем случае как рассмотрение последовательности итераций $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ отображения f: $M \to M$ некоторого множества M на (в) себя (это множество называют фазовым пространством). При этом если отображение f взаимно однозначно, то n может принимать и отрицательные значения (как итерации обратного отображения). Если множество M обладает дополнительной структурой топологического (метрического) пространства, гладкого многообразия или пространства с мерой, то возникают содержательные вопросы, касающиеся устройства инвариантных подмножеств (переходящих в себя под действием f).

Гиперболические динамические системы

Если отображение f: $M \to M$ дифференцируемого многообразия M растягивает в одном и сжимает в трансверсальном направлении, то это свойство является существенным для так называемых гиперболических систем, открытых С. Смейлом и Д. В. Аносовым [2, 3]. Приведем точные формулировки.

Если f: $M \to M$ гомеоморфизм метрического пространства M, то $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$, $f^{-n} = (f^{-1})^n$, $n \geq 0$.

Траектория точки x под действием f есть множество $O_f(x) = (f^n(x)$, n целое). Будем говорить, что отображения f, g: $M \to M$ топологически сопряжены, если существует такой гомеоморфизм h: $M \to M$, что $h \circ f = g \circ h$. Сопрягающее отображение h переводит каждую траекторию $O_f(x)$ в $O_g(h(x))$.

Пусть f: $M \to M$— диффеоморфизм гладкого замкнутого C^m многообразия M размерности не меньше двух. Будем обозначать через $d(x, y)$ полную риманову метрику на M, индуцированную римановой метрикой $||\cdot||$ на касательном многообразии TM.

Множество $\Lambda \subset M$, инвариантное относительно f (т. е. $f\Lambda \subset \Lambda$), назовем гиперболическим, если для каждого $x \in \Lambda$ касательное пространство T_xM в x представимо в виде прямой суммы пространств E^u_x, E^s, т. е. $T_xM=$
$=E^u_x \oplus E^s_x$, где $\dim E^s_x = s$, $\dim E_x = u$, $u+s = \dim M$, и:

a) $df(E^s_x) = E_{f(x)}^s$, $df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$;

b) существуют такие константы $c > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, что $||df^n \nu|| \leq c\lambda^n ||\nu||$, $\nu \in E_x^s$
и $||df^n \nu|| \leq c\lambda^n ||\nu||$, $\nu \in E_x$, $n \geq 0$;

c) E^u_x, E^s_x зависят непрерывным образом от $x \in \Lambda$.

Приведем пример простейшей гиперболической системы, так называемой аносовской, характеризующейся тем, что все фазовое пространство M является гиперболическим.

(Небольшое отступление: принято считать, что динамические системы были изобретены Пуанкаре в его трудах по качественной теории дифференциальных уравнений и небесной механике, однако задачи динамического характера рассматривались, по крайней мере, в начале XIII в. в трудах Леонардо Пизанского, который под именем Фибоначчи выпустил в 1202 г.

«Книгу об абаке», где содержалась первая в математике популяционная модель размножения кроликов при условии, что каждый месяц, начиная со второго месяца жизни, пара кроликов производит на свет другую пару. При этих ограничениях количество пар кроликов через n месяцев после начала процесса описывается последовательностью натуральных чисел Фибоначчи $Ф_n$, являющихся траекторией динамической системы на множестве натуральных чисел вида $Ф_{n+1} = Ф_n + Ф_{n-1}$, $Ф_1 = Ф_2 = 1$.)

Отображение плоскости задается следующими формулами: $x_1 = x + y$, $y_1 = x$ или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и полутраектория

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0,$$

дает $Ф_n = x_n$, $Ф_{n-1} = y_n$.

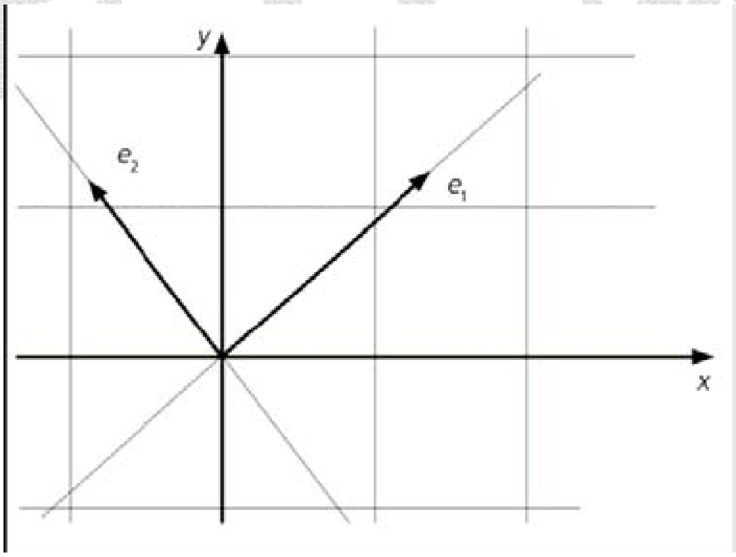

Рис. 1. Диффеоморфизм Аносова.

Система (∗) является простейшей гиперболической динамической системой на плоскости. В этом можно убедиться следующим образом. Характеристический многочлен матрицы A имеет корни $\lambda_1 = (\sqrt{5}+1)/2$, $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, которым соответствует ортогональная пара собственных векторов e_1, e_2. Выбрав систему координат с осями, направленными по этим собственным векторам (рис. 1), мы получим в каждой точке z плоскости (x, y) прямые E_z. E_z^s, параллельные соответственно e_1, e_2, причем нетрудно убедиться, что каждое из семейств прямых $\{E_z^u\}_{z\in R^2}$, $\{E_z^s\}_{z\in R^2}$ A-инвариантно и отображение A растягивает на $\{E_z^u\}$ с коэффициентом λ_1 и сжимает на $\{E_z^s\}$ с коэффициентом $|\lambda_2|$, меняя при этом ориентацию прямых $\{E_z^s\}$. Таким образом, вся плоскость R^2 становится гиперболическим множеством.

Динамическая система (∗) порождает аносовскую систему на двумерном торе T, если рассматривать T как результат отождествления всех точек плоскости, координаты которых отличаются друг от друга на целое число, так как отображение A, будучи целочисленной матрицей, сохраняет это соотношение эквивалентности, при этом весь тор T^2 становится гиперболическим множеством.

Пример, являющийся итерацией только что рассмотренного, был сообщен Р. Томом С. Смейлу в связи с доказательством того, что во множестве диффеоморфизмов T^2 существует открытое множество без притягивающих периодических точек. Смейл привлек к этой тематике Аносова, который получил многие окончательные результаты.

В 1961 г. Смейл описал диффеоморфизм $f : S^2 \to S^2$ двумерной сферы S^2 с компактным гиперболическим множеством — так называемое отображение подковы Смейла.

Пусть П — область плоскости, состоящая из единичного квадрата $B = [0,1] \times [0,1] = B_1 \cup D \cup B_2$ и двух полукругов: $A = \{(x, y) : x^2 + (y - 1/2)^2 \le 1\}$, $C = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 1/2)^2 \le 1\}$. Пусть f — диффеоморфизм области $\Pi = A \cup B \cup C$ в себя в соответствии с рис. 2. Отображение Смейла удовлетворяет условиям гиперболичности на подмножествах B_1 и B_2 и при этом инвариантное множество $\Lambda = \{p \in B_1 \cup B_2 : f^m(p) \in B_1 \cup B_2$ для всех $m\}$ является канторовым совершенным множеством с гиперболической структурой. Инвариантный относительно f континуум

$$K_m = \bigcap_{m \ge 0} f^m \Pi$$

назовем аттрактором подковы Смейла [2]. Смейл рассмотрел также n-изгибающее отображение подковы, которое переводит в себя область $\Pi^{(n)}$ плоскости, состоящую из единичного квадрата $B = B_1 \cup D_1 \cup B_2 \cup D_2 \cup \ldots \cup B_n \cup D_n$ и двух полукругов A и C, приклеенных к противоположным сторонам квадрата согласно рис. 3.

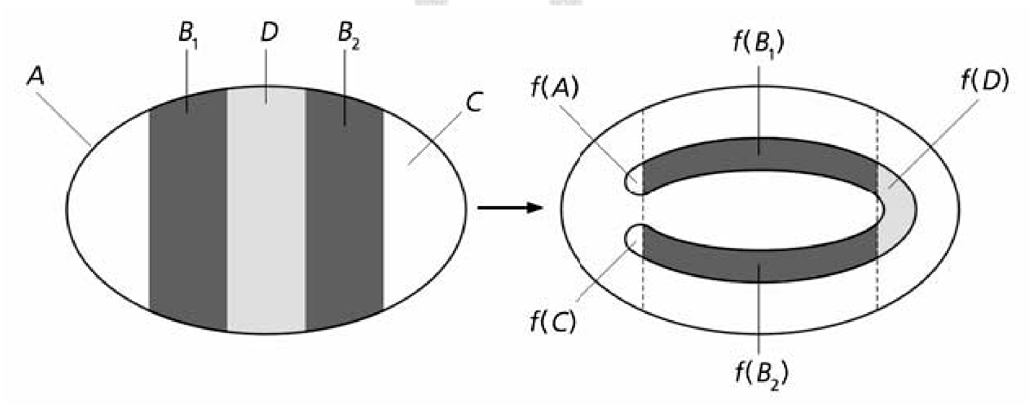

Рис. 2. Подкова Смейла.

Инвариантный континуум

$$K_n = \bigcap_{k \ge 0} f^k \Pi^{(n)}$$

назовем n-изогнутым аттрактором подковы и заметим, что в геометрической топологии подобные множества известны как континуумы Кнастера.

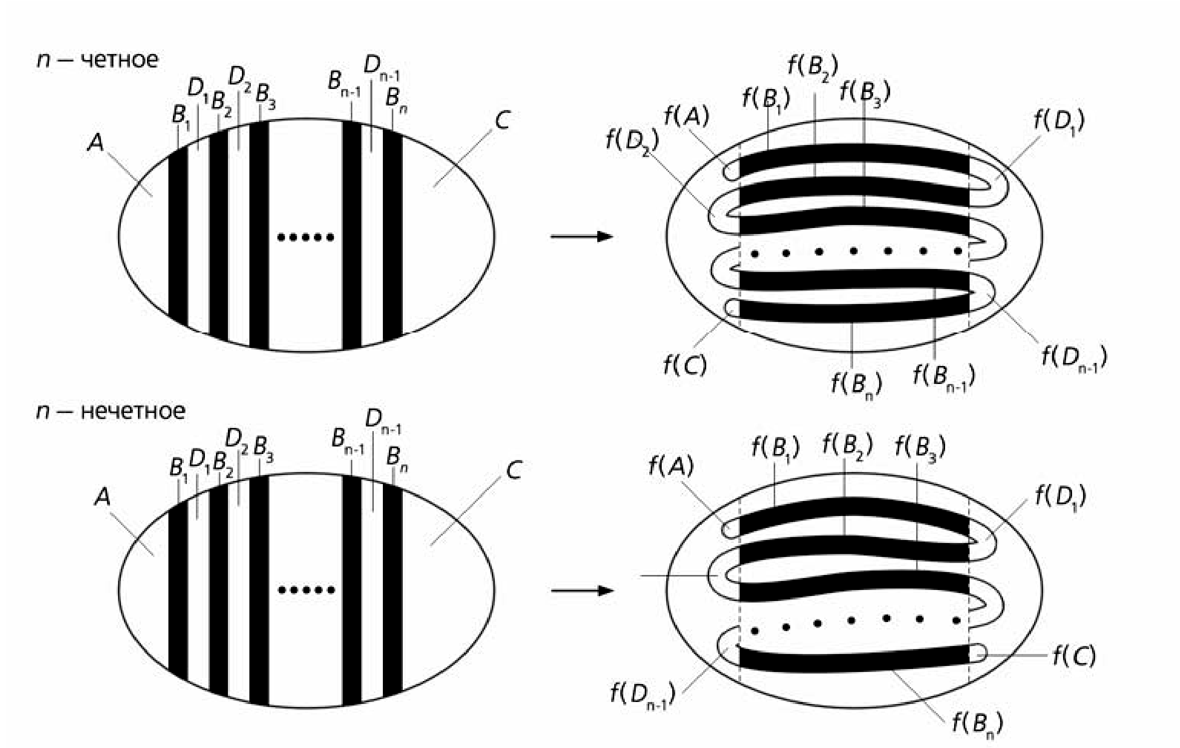

Рис. 3. n - изгибная подкова Смейла.

Справедлива следующая классификационая теорема Уоткинса [5].

Теорема. K_n гомеоморфен K_m тогда и только тогда, когда числа n и m имеют одинаковые составы простых множителей.

Аттракторы гиперболических динамических систем

Пусть $f : M \to M$ — это диффеоморфизм гладкого многообразия M. Точку x назовем неблуждающей точкой динамической системы, если для каждого натурального n и каждого открытого множества V, содержащего x, найдется $m \geq n$ такое, что $V \cap f^m V \neq \varnothing$.
Под гиперболическим аттрактором (репеллером) гладкой динамической системы $f : M \to M$ мы будем понимать такое инвариантное гиперболическое множество, состоящее из неблуждающих точек, для которого существует открытое множество $U \supset \Lambda$, удовлетворяющее условию притяжения

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n U$$

(или отталкивания

$$\Lambda = \bigcap_{n \leq 0} f^n U).$$

Приведем две конструкции аттракторов, связанных с аносовскими динамическими системами коразмерности 1. Для простоты ограничимся двумерным случаем.

Пример 1. Зададим $\bar{A} : R^2 \to R^2$ посредством рассмотренной выше матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующую аносовскую динамическую систему $A : T^2 \to T^2$ (рис. 4).

Рассмотрим инвариантное множество $P = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, состоящее из неподвижной точки $a_0 = (0, 0)$ (вернее, из ее траектории под действием группы целочисленных сдвигов Z^2) и трех точек $a_1 = (1/2, 0)$, $a_2 = (1/2, 1/2)$, $a_3 = (0, 1/2)$, образующих траекторию периода 3 диффеоморфизма A.

Следуя Смейлу, изменим отображение A в малых «прямоугольных» окрестностях P (стороны прямоугольников параллельны собственным векторам

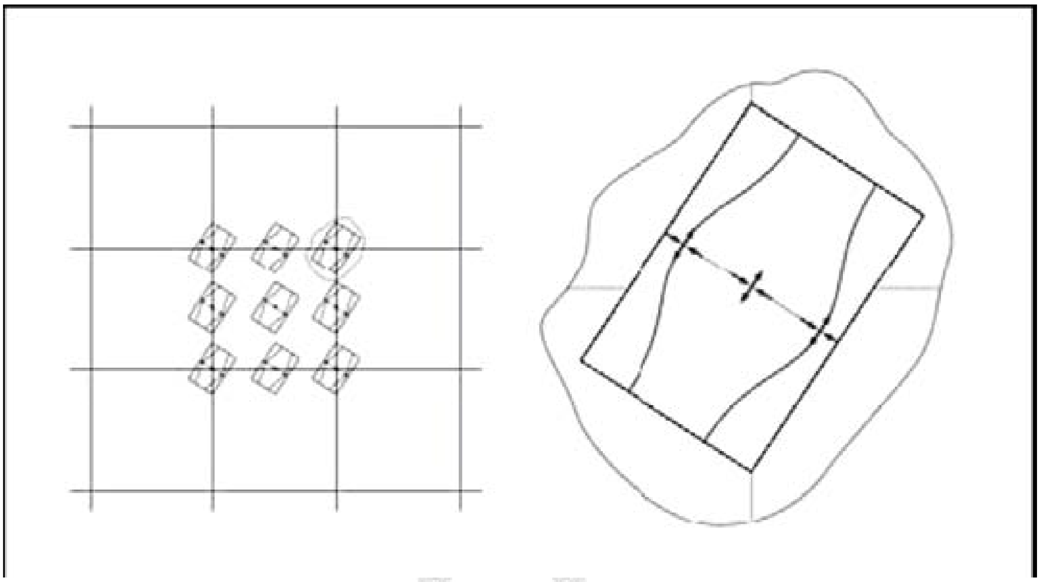

Рис. 4. Аттрактор Смейла.

e_1, e_2 матрицы A) таким образом, чтобы вместо периодической точки $a_k k = 0, 1, 2, 3$ образовались три точки a_k^-, a_k, a_k^+. При этом точки, соответствующие $k = 1, 2, 3$, образуют три периодических траектории периода 3; a_0, a_0, a_0^+ — три неподвижные точки, причем две последние — гиперболические, a_0 — отталкивающая.

В результате изменения мы получили так называемый *ДА*-диффеоморфизм $f^{A,P,}$ неблуждающее множество которого состоит из отталкивающей неподвижной точки $a0$, отталкивающей траектории $\{a_1, a_2, a_3\}$ и одномерного аттрактора Λ, бесконечное число раз кружащего по тору.

Пример 2 (рис. 4). Конструкция примера 1 может быть проведена так, чтобы выполнялось тождество $f^{A,P}(-x) = f^{A,P}(x)$; множество P совпадет при этом с множеством неподвижных точек $\mathrm{Fix}\Theta$ инволюции $\Theta : T^2 \to T^2$, заданной формулой $\Theta x = -x$. Так как инволюция Θ действует на многообразии $T^2 - P$ без неподвижных точек, можно считать, что $T^2 - P$ является двухслойной накрывающей поверхности $S_{0,4}^{\ 2}$, полученной отождествлением пар $(x, \Theta x)$, $x \in T^2 - P$, которая, как нетрудно убедиться, гомеоморфна двумерной сфере с четырьмя выколотыми точками. При этом диффеоморфизм $f^{A,P}$ накрывает диффеоморфизм $f^{A,P,\Theta} : S_{0,4}^{\;2} \to S_{0,4}^{\;2}$, обладающий одномерным гиперболическим аттрактором.

Рассмотренные примеры допускают многомерное обобщение на так называемые растягивающиеся аттракторы — ориентируемые и неориентируемые [4]. Заметим, что аттрактор примера 1 — ориентируемый, а примера 2 — неориентируемый.

Для формулировки классификационных теорем введем понятие класса ориентируемого (неориентируемого) аттрактора.

Рассмотрим множества Γ пар (A, P) и $\tilde{\Gamma}$ троек (A, P, Θ), где A— аносовский автоморфизм коразмерности 1 тора (с единственным собственным числом внутри единичного круга с центром 0), P — конечное A-инвариантное подмножество, Θ — линейная инволюция того же тора, перестановочная с A (т. е. $\Theta \circ \Theta = \mathrm{id}$, $A \circ \Theta = \Theta \circ A$), обладающая конечным множеством неподвижных точек FixΘ, которое для случая тройки включается в множество P. Введем в Γ ($\tilde{\Gamma}$) отношение эквивалентности ~, считая, что $(A_1, P_1) \sim (A_2, P_2)$ $[(A_1, P_1, \Theta_1) \sim (A_2, P_2, \Theta_2)]$, если существует такое линейное отображение $\Psi : T^n \to T^n$ (являющееся суперпозицией группового автоморфизма и сдвига), что $A_2 = \Psi A_1 \Psi^{-1}$, $P_2 = \Psi P_1$$[A_2 = \Psi A_1 \Psi^{-1}$, $\Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}$, $P_2 = \Psi P_1]$.

Класс эквивалентности пары (A, P) [тройки (A, P, Θ] называется классом ориентируемого (неориентируемого) аттрактора.

Теорема динамической классификации [4]. Каждому ориентируемому (неориентируемому) растягивающемуся аттрактору Λ коразмерности 1 диффеоморфизма $f : M \to M$, $\dim M > 2$, соответствует класс ориентируемого (неориентируемого) аттрактора, и это соответствие взаимно однозначно.

Для изложения результатов топологической классификации [5] дадим определение матричного централизатора.

Определение. Пусть A — унимодулярная матрица, входящая в определение класса аттрактора. Централизатор $Z(A)$ — это совокупность унимодулярных, перестановочных с A матриц.

Теорема топологической классификации аттракторов коразмерности 1 [5]. Ориентируемые (неориентируемые) растягивающиеся аттракторы $\Lambda(A_1, P_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2)$ $[\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2)]$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует такое линейное отображение Ψ тора вида $\Psi(x) = Cx + \xi$ (здесь C — унимодулярная матрица), что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, при этом $\Psi P_1 = P_2 [\Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}]$, и точки спектров матриц, соответствующие одинаковым собственным векторам, одинаково расположены относительно стандартной единичной окружности комплексной плоскости.

Философско-психологическое заключение и немного о конструировании гиперболического странного аттрактора диффеоморфизма плоскости

Первоначальная геометрическая конструкция гиперболического странного аттрактора диффеоморфизма плоскости [6] привела к появлению разнообразия двумерных диффеоморфизмов, порождающих гиперболические странные аттракторы. Полной классификации аттракторов диффеоморфизмов поверхностей до сих пор нет. Согласно гиперболической теории динамических систем, наличие аттрактора диффеоморфизма плоскости приводит к ее (или куска, гомеоморфного кругу) разбиению гладкими кривыми — устойчивыми многообразиями, топологически подобными прямым линиям, таким образом, что через каждую точку проходит единственная линия, и в пределах компактных кусков плоскости части этих линий непрерывно зависят от точек, т. е. через близкие точки проходят близкие линии.

Этим же свойством единственности и непрерывной зависимости обладают кривые линии — решения дифференциального уравнения. Рассматриваемая ситуация допускает применение одной теоремы Пуанкаре, согласно которой среди этих линий могут быть замкнутые, что будет противоречить свойствам устойчивых многообразий. Поэтому первое проблемное поле строится для доказательства невозможности существования гиперболического странного аттрактора диффеоморфизма плоскости. В этом проблемном поле естественно формируются структурные элементы вида, изображенного на рис. 5. «Так это же река, исчезающая в пустыне», — обронил академик Аносов — один из моих научных руководителей. (Из высказываний этой работы следует, что я сторонник педагогики одного слова (в крайнем случае одного высказывания), вошедшего в резонанс с душевным строем слушателя (читателя).)

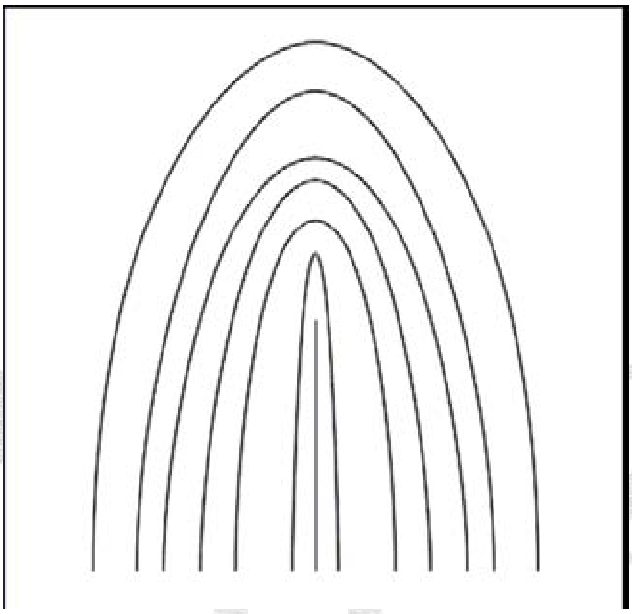

Рис. 5. «Река, исчезающая в пустыне».

Дальнейший анализ показывает, что подобная река порождает периодическую точку отталкивания, причем подобных точек в конечном куске плоскости, в котором расположен аттрактор, может быть лишь конечное множество. Следовательно, структурные элементы типа рек, исчезающих в пустыне, должны вкладываться друг в друга. В качестве других элементов проблемного поля предположение о существовании странного аттрактора порождает так называемые неустойчивые многообразия, гомеоморфные прямым линиям, из которых и складывается этот аттрактор. Эти линии имеют ограниченную кривизну, и каждая из них плотна в аттракторе. Согласно известным математическим результатам, дополнение к теоретико-множественному замыканию линии, обладающей этим свойством, имеет не менее четырех компонент связности.

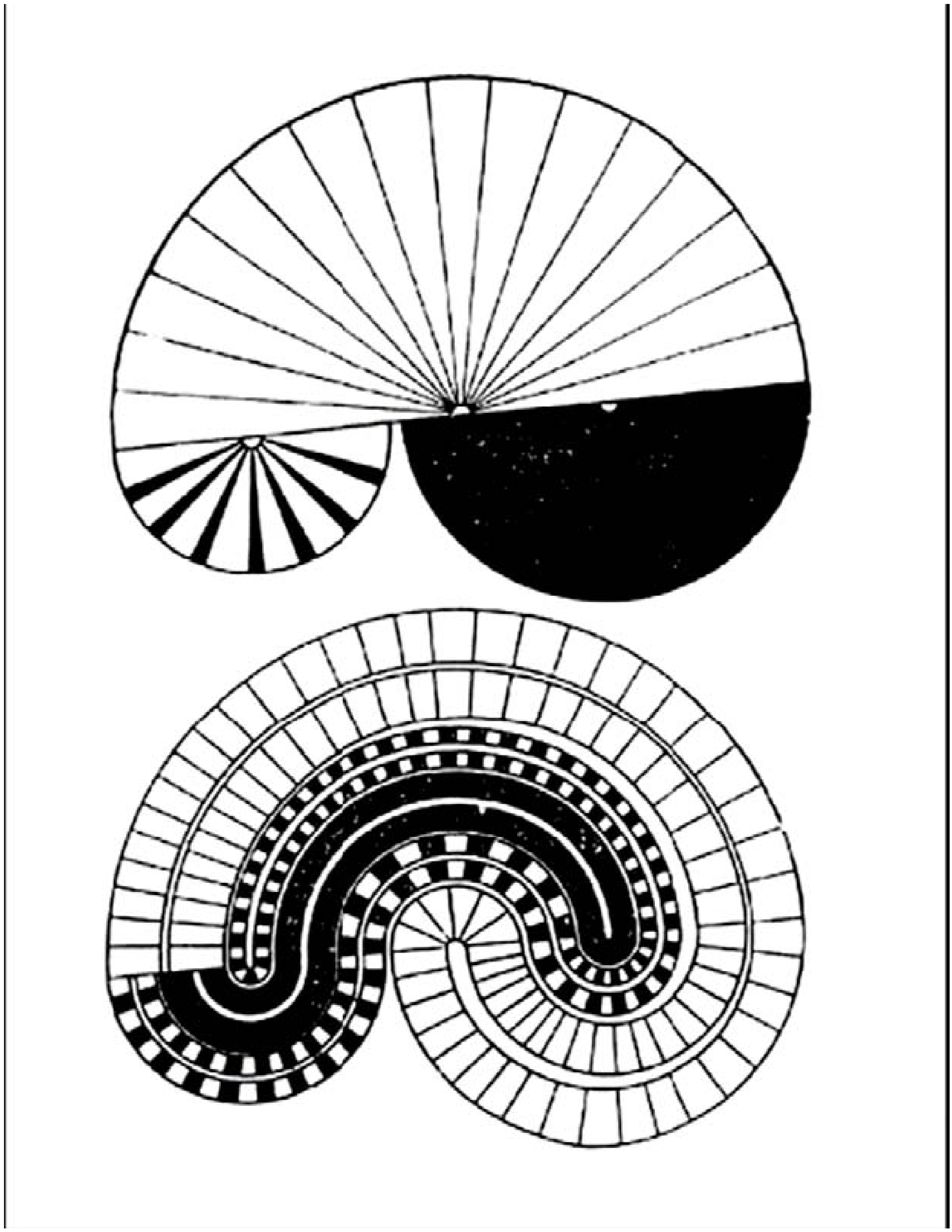

Рис. 6. Неориентируемый аттрактор диффеоморфизма круга (или двумерной сферы).

Таким образом, если и существует гиперболический странный аттрактор на плоскости, то он порождается отображением в себя не менее чем четырехсвязной ограниченной области. Попытки доказать несуществование подобного отображения оказались неудачными, что привело к замене основной гипотезы о несуществовании подобного аттрактора на противоположную, которая и увенчалась успехом. Детали конструкции подобного аттрактора представлены на рис. 6.

Прогресс творческой эволюции в математике выражается в разнообразии исследовательских программ, конвергирующих в плодотворные гибриды, и в разнообразии математических моделей, дающих все более точные

приближения природных реалий. Пробы и ошибки, являясь стохастическим поиском гипотез, часто предшествуют инсайту. Однако следует отметить еще один важный психологический феномен — поризм, сопутствующий кристаллизации новых теорий (и не только в математике).

«Они (греки) называли поризмами — следствиями — те побочные результаты, которые получались из доказательства теоремы или решения задач, результаты которых они непосредственно не искали; эти поризмы получались в таком виде случайно, без каких-нибудь добавочных трудов, и представляли, как говорил Прокл, нечто вроде плода, сбитого ветром, или премии» [7]. Философ Б. С. Грязнов считал поризм движущей пружиной при создании теорий.

«Поризм может варьироваться по глубине и размерам, но он представляется неотъемлемой компонентой плодотворной теории, играя роль гомеостаза системы, сигнализирующего о правильности выбранного пути. Поризм непредсказуем, но необходим как эквивалент вдохновения и восторга идущей из детства способности удивляться, радоваться, восхищаться» [8].

Отметим поризм, сопутствовавший открытию плоского гиперболического странного аттрактора. Один из знаменитых математиков, участвовавших в создании атомной и водородной бомб в Лос-Аламосе, С. Улам в своей книжке «Нерешенные математические задачи» приводит следующую задачу со ссылкой на знаменитого тополога К. Борсука. «Предположим, что $T(p)$ есть дифференцируемое преобразование плоскости. Если для некоторой точки p замыкание C множества всех итераций p, $T(p)$, $T^2(p)$, … связно, то будет ли C обязательно локально связным?»

Построенный аттрактор обладает свойством структурной устойчивости, из которого вытекает, что порождающий его диффеоморфизм может быть задан полиномами двух переменных, при этом из его гиперболичности вытекает, что множество C для его типичной точки совпадает со всем аттрактором, который не является локально связным.

Попробуем с этих же позиций рассмотреть мои стихотворные опыты. Мой первый стихотворный опыт совпал по времени с публикацией примера плоского странного аттрактора [6]. Я работал тренером школы инструкторов альпинизма, возглавляемой известным мастером альпинизма Кириллом Баровым. Школа располагалась в альплагере «Эльбрус», и в среде тренеров была очень популярна «Шхельдинская игра», смысл которой состоял в поочередном произнесении стихотворных тостов во время инструкторских застолий. На юбилейном вечере, посвященном начальнику школы, я был вынужден выдавить из себя: «Нас дождь мочил, но с нами был Кирилл». Я поделился своим «стихотворным подвигом» с известной поэтессой Эльвирой Частиковой и получил встречный вопрос: «Почему ты не закончил стих?» На недоумение начинающего мне сразу же был дан пополненный вариант: «Нас дождь мочил, но с нами был Кирилл — не это ли он все и сотворил?» Восхищенный экспромтным остроумием поэтессы, я продолжил свои «поэтические попытки».

Читатель, если вам не приходилось во сне сочинять стихов или теорем, обратитесь к опыту великого живописца Сальвадора Дали, к которому во сне являлись сюжеты его картин. Пришло время, когда в силу жизненных обстоятельств меня начал преследовать образ мотылька, летящего на пламя. Этот знакомый всем пример спонтанно неразумной жертвенности стал вехой жизненного пути, и однажды, проснувшись в доме своего давнего знакомого, я прочитал хозяину дома следующее:

Не двигай, мотылек, сожженными крылами,
Сияет над тобой пленительное пламя:
Свеча твоя по-прежнему горит.
А голос внутренний в ночи то шепчет,
То кричит и требует лететь — лети!
Но нету сил и крыл —Возможно лишь ползти.

Продолжение пришло позже, когда, слушая по радио выступление поэтессы Риммы Козаковой о ее латиноамериканских впечатлениях, я был пленен прозвучавшей цитатой из известного южноамериканского мыслителя, выгравированной на его памятнике: «Любовь — достоинство того, кто любит». Вот это продолжение.

Не вздрагивай, свеча, при звоне телефонном!
Безымянный призыв не отвлечет от дел.
Пребудут мотыльки твоим горящим фоном,
Что ж до меня — я мыслю, значит цел!
Прощай, не осторожничай, желая отдалиться,
Не трепещи меня, не ворожи мне зла!
Любовь живет одна, не в силах умалиться,
Прочь раздражение, и вновь душа светла.
Уйти от ужаса: другой тебя голубит!
Отравы чашу пить и не достать до дна!
Сон — страсть, мрак — сон: мне не уйти от сна.
Но слово сказано, оно разбудит:
«Любовь — достоинство того, кто любит!»

По-видимому, в настоящее время нет серьезных исследователей творческого процесса или творческих работников конкретных областей знания, которые отрицали бы наличие в этом процессе следующих компонент: подготовительная работа, когда происходит формирование проблемного поля из элементов известных и гипотетических под эгидой предпочтительной задачи или идеи, затем созревание решения, проходящее в сознательной и бессознательной формах, далее инсайт, порождающий вдохновение, и верификация (проверка истинности). Дадим поэтическую иллюстрацию этого ряда.

Полет коня

Крылатый конь в ночи уносится на вздохах,
Но нежностью нагруженный молчит.
Пусть нет опоры в воздухе и звездах:
Он ноздри напрягает и летит.
И ловит кайф на волнах вдохновенья,
Отдав расчетам дробный ритм и цокот, —
Крылами в небе пишет сновиденье —
Неуловимое как моря легкий рокот.
В том сновидении овала белизна
И тайна лилии, мерцающей у дна,
Дыханье легкое родившейся молвы,
Лекарство от несбывшейся любви.
Крылатый конь — гонец мечты — Пегас
Без устали творит, а день давно погас.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Вертгеймер М. Продуктивное мышление. М., 1987.*
2 *Смейл С. // УМН. 1970. Т. 25. Вып. 1(151). С. 113—185.*
3 *Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 1967. С. 90.*
4 *Плыкин Р. В. // УМН. 1984. Т. 39. Вып. 6(240). С. 75—113.*
5 *Плыкин Р. В. // УМН. 2002. Т. 57. Вып. 6(348). С. 123—166.*

6 *Плыкин Р. В. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. 1974. Т. 34. С. 243—264.*
7 *Лакатос И. Доказательства и опровержения. М., 1967.*
8 *Плыкин Р. В. Математика: определенность развития или анархическое предприятие? // Философ и время. Обнинск, 1999. С. 71—79.*