

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ

М.Г. Каримов

*Магомед Гасанович Каримов, доктор физико-математических наук, профессор физического факультета Дагестанского государственного университета, научный руководитель Исследовательского центра ДГУ. Руководитель проекта 05-01-00221.*

Целью данной статьи является ознакомление читателя с новой областью реконструктивной томографии. В статье исследована возможность создания нового инструмента получения, накопления и прогнозирования новых знаний о стохастической среде посредством математического моделирования, представлены физические основы стохастического томографа реального времени для получения объемной экспресс информации о состоянии исследуемой среды.

Разработанная автором теория стохастических потоков успешно применена к коррелированным многофотонным процессам. Полученные результаты наглядно демонстрируют особенности и некоторые преимущества стохастической томографии перед позитронной томографией (РТ). Обсуждены также вопросы соответствия стохастической томографии обратной задаче Радона, в частности задаче хромотомографии.

В качестве стохастического объекта рассматривается некоторая система, причем природа возникновения стохастичности среды не конкретизируется. В общем случае такая система представляет собой трехмерный объект, состоящий из распределенных по всему объекту источников случайных квантов, распространяющихся по всевозможным направлениям. Анализируя излучение квантов по всевозможным направлениям, можно получить распределение источников по всему объему, решая обратную задачу интегральной геометрии на основе теории Радона [1]. В этом подходе не учитывается конечность скорости излучения квантов, а предполагается, что информация распространяется мгновенно. Эта задача классической эмиссионной томографии решена для различных случаев [2], но по своей постановке она не может дать информацию о состоянии данной точки объекта в произвольный момент времени.

Предлагаемая в данной работе методика может стать основой стохастической томографии. Она базируется на утверждениях, что излучение квантов стохастично, а скорость их распространения конечна. На основе изучения коррелированных процессов, т.е. стохастических процессов (в том числе и нелинейных), сопровождающихся случайной генерацией в данной точке одновременно двух и более квантов, в работе построена теория формирования информации о состоянии каждой точки стохастического объекта в произвольный момент времени. Показано, что именно благодаря свойству стохастичности эмиссионных систем и появляется возможность изучения «внутренней» структуры объекта в реальном времени. Для реконструктивных схем использовано явление генерации коррелированных квантов при многоквантовых процессах, таких как двухфотонная люминесценция, пара метрические процессы и т. д. Определение состояния пространственной точки среды происходит по измерению интегральных потоков квантов на основе теории потоков, разработанной в [3]. Поскольку натурные эксперименты для непосредственной проверки предлагаемой методики в настоящий момент не могут быть поставлены, в работе проводится ее исследование на основе подходов математического моделирования и вычислительного эксперимента как информационной технологии получения знаний о реальности [10]. Для наглядной демонстрации основной идеи и возможностей стохастической

томографии проводится сравнение с другими методиками. Для моделирования реальных объектов используются медицинские атласы.

### **Теория потоков как основа описания эмиссионных сред**

Предполагается, что любая точка эмиссионной среды с координатой  $r$  является источником коррелированных квантов, распространяющихся по все возможным направлениям и генерируемых в результате многофотонных процессов, случайных по времени. Если предположить, что процесс генерации квантов по времени в точке  $r$  есть последовательность однотипных случайных событий  $\Phi(r,t)$ , и число генераций в этой точке обозначить через  $N(r,t)$ , то этот процесс определяется аналитическим выражением

$$\begin{aligned}\Phi(r,t) &= \sum_t^{\infty} \delta(t - t_i(r)), \\ N(r,t_N) &= \int_{-\infty}^{t_N} \Phi(r,t) dt + 1,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $t_i(r)$  — моменты времени генерации квантов в точке  $r$ . Случайной непрерывной переменной потока является интервал времени между последовательными событиями  $T(r) = t_{i+1}(r) - t_i(r)$ . В частности, если поток случайных генераций квантов стационарный, без последствия (марковский) и ординарный, то такой поток есть простейший поток [3] с показательным распределением:

$$W(r,t) = \lambda(r) \exp(-t\lambda(r)),\tag{2}$$

где  $t$  — текущая (непрерывная) переменная случайного интервала  $T(r)$ , и интенсивность потока генерации в точке  $r$  определяется с помощью среднего случайного интервала между генерациями квантов, т.е.  $\lambda(r) = 1/\bar{T}(r)$ . В частности отметим, что поток, образованный в результате наложения простейших потоков, создаваемых различными одиночными источниками генерации и распространяющихся вдоль одного направления, также будет простейшим потоком. Интенсивность такого потока квантов определяется значениями интенсивностей потоков, создаваемых всеми источниками на прямой длиной  $L$ , т.е.

$$\lambda = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda(r) dr.$$

Общая схема реконструкции среды показана на рис.1. Эмиссионная среда, ограниченная в пространстве с линейным размером  $L$ , является объектом исследования, где интенсивность потока генераций  $\lambda(r)$  пропорциональна плотности  $\rho(x,y)$  эмиссионно-активной среды. В работе не рассматриваются причины, по которым происходят эти генерации. Важно только то, что при этом создаются потоки коррелированных квантов, и они могут быть зарегистрированы в подвижной системе координат  $(s,r)$  для различных углов поворота  $\varphi$ .

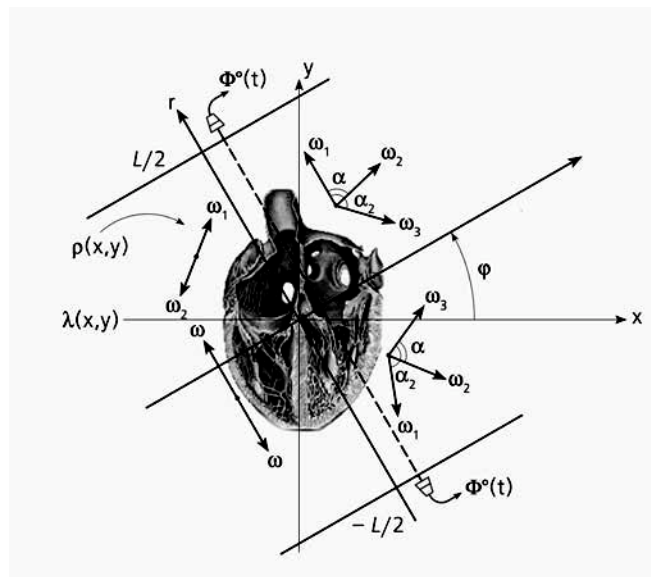


Рис.1. Общая схема проведения эксперимента для двумерного случая; здесь  $\varphi$  — угол поворота системы координат  $(s, r)$  относительно неподвижной системы координат  $(x, y)$ .

$\Phi^{\bar{a}}(t), \Phi^{\ominus}(t)$  — суммарные потоки квантов с интенсивностью  $\lambda(x, y)$ , создаваемые всеми точками эмиссионной среды, расположенными на прямой наблюдения в оперативном пространстве  $L$ . Рассматривается случай, когда коррелированные кванты с одинаковой частотой испускаются под углом  $\alpha = 180^\circ$ .

### Обратная задача, метод совпадения коррелированных квантов (СКК)

Практический интерес представляет задача нахождения законов распределения потока квантов, создаваемого источниками, при условии, что исходным потоком квантов является суммарный поток с известным законом его распределения. Эта и есть обратная задача томографии с использованием теории потоков, которая в конечном итоге должна определять плотность распределения эмиссионной активности  $\rho(x, y)$ . Решение этой задачи существенно упрощается, хотя это и не принципиально, если считать, что коррелированные кванты распространяются в противоположных направлениях со скоростью  $c$ . Для этого случая суммарные потоки имеют следующий вид:

$$\Phi^{\ominus}(t + \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - (t_i^{\ominus} - \tau)) \quad (3)$$

$$\Phi^{\bar{a}}(t + (\tau_0 - \tau)) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - (t_j^{\bar{a}} - (\tau_0 - \tau))),$$

где  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  есть переменная задержки времени;  $\tau_0 = L/c$ ,  $t_i^{\bar{a}}$  и  $t_j^{\bar{a}}$  — моменты времени фиксирования квантов слева и справа оперативного пространства  $L$  соответственно. Для выделения потока уединенной точки с координатой  $r$  используется принцип совпадения коррелированных квантов (СКК) при разряжении одного из двух потоков, в предположении, что известна его плотность распределения  $W(t)$ . Это равносильно формированию нового потока  $\Phi_X(t)$ , состоящего из квантов, отобранных из потоков  $\Phi^{\bar{a}}(t), \Phi^{\bar{a}}(t)$ , для которых выполняется условие  $t_i^{\bar{a}} - t_j^{\bar{a}} = 2\tau - \tau_0$ , как показано на рис.2. Используя теорию вероятности [3], можно установить, что среднее значение периода  $\bar{T}_X$  этого потока равно среднему значению периода потока, создаваемого точкой с координатой  $r$ , т.е.  $\bar{T}_X = \bar{T}(r) = 1/\lambda(r)$  Определение законов распределения синтезированного потока для общего случая можно представить как за

дачу определения полной вероятности всевозможных совпадений моментов двух измеряемых потоков  $\Phi^{\bar{a}}(t)$  и  $\Phi^{\bar{a}'}(t)$ . Синтезированный таким образом поток есть совокупность совпадений событий при сравнении бесконечного числа потоков Эрланга [4], полученных из исходного потока, и плотность распределения нового потока равна

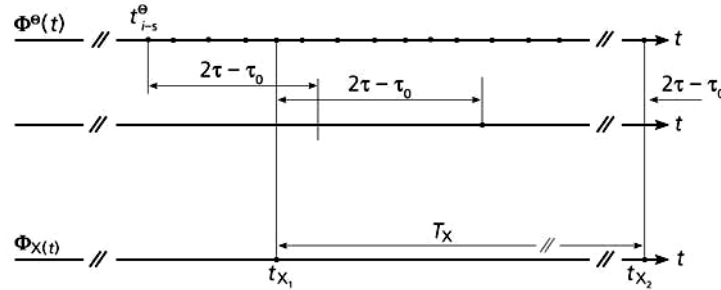


Рис.2. Принцип формирования потока  $\Phi_X(t)$  из двух фиксируемых потоков  $\Phi^{\bar{a}}(t)$  и  $\Phi^{\bar{a}'}(t)$  по методу СКК. Длительность случайного интервала времени  $T_{X,l} = t_{X,l} - t_{X,l}$  определяется как разность между последовательными моментами синтезированного потока  $\Phi_X(t)$ . Моменты времени выбираются из последовательности  $\{t_i^{\bar{a}}\}$  точек, для которых существуют точки в последовательности  $\{t_i^{\bar{a}'}\}$ , отстоящие от первых ровно на  $2\tau - \tau_0$ , где  $\tau = r/c$ ,  $\tau = L/c$ , а  $t_i^{\bar{a}}$  и  $t_i^{\bar{a}'}$  — моменты времени фиксирования квантов на концах прямой наблюдения длиной  $L$ .

$$W_X(t) = \sum_{s=1}^{\infty} Pq^{s-1}W_s(t), \tag{4}$$

где  $P = P(r) = \lambda(r)/\lambda$  есть вероятность генерации, а  $q = 1 - P$ , причем коэффициент  $Pq^{s-1}$  задает вклад потока Эрланга  $s$ -го порядка с плотностью распределения  $W_s(t)$  в плотность распределения синтезированного потока  $\Phi_X(t)$ . Таким образом, задача определения плотности распределения синтезированного потока  $W_X(t)$  сводится к задаче определения плотностей распределения потока Эрланга  $W_s(t)$ . Плотность распределения потока Эрланга связана с плотностью распределения исходного потока рекуррентной формулой [4]

$$W_s(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_{s-1}(t - \tau)W(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где  $f_0(t) = 1$  и  $f_1(t) = f(t)$  — функция распределения исходного потока. Определение плотности распределения упрощается, если использовать преобразования Хартли (ПХ) [5] (симметричные и вещественно-значные), т.е.

$$\theta(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W(t)\text{cas}(vt)dt, \tag{6}$$

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(v)\text{cas}(vt)dv,$$

где  $\text{cas}(vt) = \cos(vt) + \sin(vt)$ . Из (5) и (6) можно получить другую рекуррентную формулу:

$$\theta_s(v) = \theta_{s-1}(v)E(v) + \theta_{s-1}(-v)O(v), \tag{7}$$

где  $E(v) = (\theta(v) + \theta(-v))/2$ ,  $O(v) = (\theta(v) - \theta(-v))/2$ , а  $\theta_s(v)$  — хартли-образ плотности распределения потока Эрланга  $s$ -го порядка. Учитывая выражения (7) и (4), после несложных преобразований легко получить формулу для хартли-образа синтезированного потока [6]:

$$\theta_x(v) = \sum_{s=1}^{\infty} Pq^{s-1}(\theta_{s-1}(v)E(v) + \theta_{s-1}(-v)O(v)). \quad (8)$$

При вычислении  $\theta_s(v)$ , применяя формулу (5), удобно использовать некоторые свойства ПХ, в частности, такие как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(t)}{dt} \operatorname{cas}(vt) dt = v\theta(-v), \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int W(t) dt \right) \operatorname{cas}(vt) dt = \frac{1}{v} \sigma(-v).$$

Это

позволяет определить сумму геометрической прогрессии (8) и получить простое выражение

$$\theta_x(v) = P \frac{\sigma(v) - \frac{q}{2} \theta^2(v) + \theta^2(-v)}{1 - q(\theta(v) + \theta(-v)) + \frac{q^2}{2} (\theta^2(v) + \theta^2(-v))}, \quad (10)$$

которое устанавливает связь между исходным и синтезированным потоками с помощью ПХ [7]. Используя полученное выражение (10), можно вычислить непосредственно хартли-образ  $\theta_x(v)$  потока, полученного методом СКК, если известен хартли-образ исходного потока  $\theta(v)$ . Для плотности с показателем распределения можно получить, что хартли-образ, соответствующий этому распределению, равен

$$\theta(v) = \frac{\lambda(\lambda + v)}{\lambda^2 + v^2}. \quad (11)$$

Тогда, согласно (10) и (11), выражение для хартли-образа распределения синтезированного потока будет иметь следующий вид:

$$\theta_x(v) = \frac{P\lambda(P\lambda + v)}{(P\lambda)^2 + v^2}, \quad (12)$$

что соответствует плотности распределения

$$W_x(t) = P\lambda \exp(-P\lambda t) \quad (13)$$

на основании свойства однозначного соответствия прямого и обратного преобразований Хартли. Если предположить, что параметр  $P = P(r) = \lambda(r)/\lambda$ , то выражение (13) может быть представлено следующим образом:

$$W_x(t) = \lambda(r) \exp(-\lambda(r)t) = W(r, t); \quad (14)$$

оно показывает, что плотность потока, синтезированного методом СКК, соответствует плотности распределения потока, создаваемого источником генерации квантов, расположенного в точке с координатой  $r$ , и этот поток — простейший. Следовательно, сканируя время задержки  $\tau$  исходных потоков  $\Phi^3(t)$  и  $\Phi^4(t)$  относительно друг друга в пределах от  $-(\tau_0/2)$  до  $+(\tau_0/2)$ , можно организовать фильтрацию потока для всех точек оперативного пространства  $L$ . Предложенный алгоритм может стать совершенно иной, новой основой при



решении реконструктивной задачи, а именно стохастической ре конструктивной задачи томографии. Таким образом, согласно полученному результату (14), аналитическую формулу для потока, синтезированного методом СКК независимо от типа распределения суммарных коррелированных стохастических потоков  $\Phi^a(t)$  и  $\Phi^b(t)$ , можно представить как логическое произведение суммарных потоков (3):  $\Phi_x(t) = \Phi(r,t) = \Phi^a(t + \tau) \& \Phi^b(t + (\tau_0 - \tau))$  и  $P_x = P(r)$ . Но эта формула справедлива теоретически, т.е. только для стохастических (непрерывных) потоков и только для случая фиксирования с бесконечно большой точностью.

### Метод СКК для реальных (дискретных) потоков

Для реальных измерений по принципу СКК необходимо учитывать тот факт, что фиксирование квантов в потоках происходит не мгновенно, а с конечной точностью и в течение определенного времени. Если предположить, что время наблюдения ( $\Delta t$ ) равно разрешению временных измерений, то можно показать, что выражение

$$P^0 = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(r_k))$$

есть вероятность фиксирования событий в суммарном потоке в произвольный дискретный момент времени, где  $n = L/c\Delta t$  есть число дискретных точек

— источников на прямой  $L$ . И в этом случае интенсивность стационарного потока, создаваемого дискретной точкой с координатой  $r_k$ , равна

$$\lambda^T(r_k) = \int_{r_k - \Delta t c/2}^{r_k + \Delta t c/2} \lambda(r) dr.$$

Следовательно, параметр потока, создаваемого дискретной точкой, будет равен  $a^T(r_k)\lambda^T(r_k)\Delta t$ . При реальных измерениях по методу СКК процесс восстановления может быть представлен как вероятностный процесс, состоящий из двух независимых случайных явлений, которые являются совместимыми. В этом случае вероятность одновременного проявления события на концах прямой наблюдения равна

$$P^{st}(r_k) = (P^0)^2 + (1 - (P^0)^2)P(r_k), \quad (15)$$

где  $P(r_k)$  — вероятность генерации коррелированных квантов в точке  $r_k$ , распространяющихся в противоположных направлениях, а  $P^0$  есть суммарная вероятность генерации всех точек, расположенных на прямой наблюдения [8]. Как показывает формула (15), постоянный пьедестал  $(P^0)^2$  присутствует для всех восстанавливаемых точек, он определяется всеми источниками, расположенными на прямой, и справедливо следующее неравенство:

$$P^{st}(r_k) - P(r_k) = (1 - P(r_k))(P^0)^2 \geq 0, \quad (16)$$

которое и указывает на то, что процесс восстановления неоднозначен, так как условие  $P^{st}(r_k) - P(r_k) = 0$  выполняется только тогда, когда  $P^0 \equiv 0$  и/или  $P(r_k) \equiv 1$ . А это означает, что суммарный поток отсутствует и/или поток, создаваемый точкой с координатой  $r_k$ , есть регулярный поток.

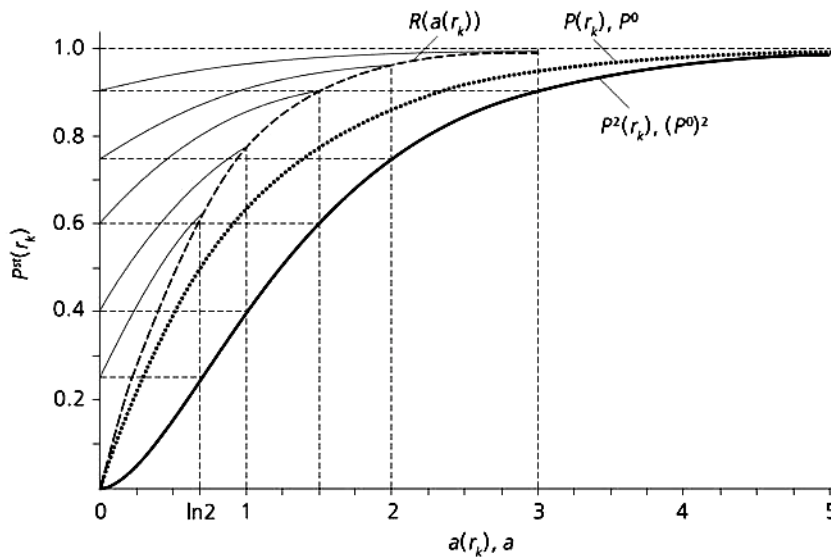


Рис.3. Кривые зависимости вероятности  $P^{st}(r_k)$  совпадения квантов, фиксируемых по методу СКК, от параметра простейших потоков  $a(r_k)$  для различных значений суммарного потока  $a$ . Для наглядности приведены также графики как для вероятности генерации  $P(r_k)$  точки  $r_k$  на прямой исследования, так и для вероятности суммарного потока квантов  $P^0$  вдоль этой же прямой.

Но эти оба режима являются «нерабочими», так как при этом потоки не обладают свойством стохастичности, т.е. потоки либо регулярны, либо их нет вовсе. В предположении, что генерируемые потоки простейшие, вероятность генерации равна

$$P(r_k) = 1 - \exp(-a^T(r_k)), \tag{17}$$

т.е. вероятность  $P = P(r_k) = P(a^T(r_k))$  есть функция только от  $a^T(r_k)$ , а  $P^0 = P^0(a) = 1 - \exp(-a)$  есть функция только от параметра суммарного потока  $a$ . Следовательно, на основании (15) и (17) вероятность восстановления  $P^{st}(r_k) = P^{st}(a^T(r_k), a)$  есть функция двух переменных. На рис.3. показано, как вероятность зависит от параметров потока ( $a^T(r_k), a$ ). Необходимо обратить внимание на то, что каждая кривая зависимости вероятности восстановления  $P^{st}(r_k)$  имеет ограниченный интервал определения, равный  $[0, a]$ , и состояние, восстанавливаемое непосредственно для точки  $r_k$ , зависит от «окружения» этой точки, т.е. от  $a$ , причем постоянная составляющая целиком и полностью определяется также суммарным параметром  $a$ . Как видно из (15) и (17), для точек  $r_k = r^0$ , для которых  $a^T(r_k) \equiv 0$ , следовательно, и  $P(r_k = r^0) \equiv 0$ , справедливо равенство  $(P^0)^2 = P^{st}(r^0)$ . Тогда, используя этот факт, можно получить выражение для параметра истинного потока точки с координатой  $r_k$ ,

$$a^T(r_k) = \ln \frac{1 - P^{st}(r^0)}{1 - P^{st}(r_k)}, \tag{18}$$

которое является основной формулой стохастической томографии, т.е. формулой реконструкции изображения. Заметим, что в качестве точек с нулевыми параметрами потока или так называемых «реперных» точек могут быть выбраны точки, специально выделенные как «аппаратные» и заведомо не расположенные на объекте. То есть восстанавливаемое изображение объекта исследования целиком и полностью определяется изображением стохастической томографии, и только им. Учитывая, что непосредственно измеряемой величиной в эксперименте по методу СКК является число совпадений  $N^{st}(r_k, \lambda)$  (режим счета совпавших фотонов) за время эксперимента, то по этим данным вычисляется новый параметр:

$$a^{st}(r_k, \lambda) = \ln \frac{1 - N^{st}(r^0, \lambda)/\lambda}{1 - N^{st}(r_k, \lambda)/\lambda}, \quad (19)$$

который и есть параметр, определяемый методом СКК для реальных квантовых потоков; он будет зависеть от продолжительности эксперимента ( $\lambda$ ). Но нетрудно заметить, что параметры, вычисляемые по формулам (18) и (19), связаны между собой соотношением

$$a^T(r_k) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a^{st}(r_k, \lambda)$$

при условии, что существует предел

$$P^{st}(r_k) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (N^{st}(r_k, \lambda)/\lambda) \quad [9].$$

Необходимо отметить, что параметр  $a^{st}(r_k, \lambda)$  вычисляется с использованием числа совпадений квантов  $N^{st}(r_k, \lambda)$  по формуле (19) и соответствует своей величине времени задержки  $\tau$ .

### Компьютерное моделирование

Можно выполнить чисто теоретическое исследование и установить, при каких характеристиках системы измеряемый параметр потока  $a^{st}(r_k, \lambda)$  будет соответствовать истинному параметру потока  $a^T(r_k)$  (или просто  $a(r_k)$ ) с заданной точностью. Это задача для отдельного рассмотрения, она представляет самостоятельный интерес. В частности, этот вопрос был исследован с помощью компьютерного моделирования на всех этапах, начиная от генерации коррелированных квантов до визуализации измеряемого параметра  $a^{st}(r_k, \lambda)$ . Принципиальная схема моделирования показана на рис.4. Данная схема наиболее полно отображает все стадии, через которые проходит процесс стохастической томографии. Функционально схема моделирования состоит из двух частей: области генерации  $G$  и области реконструкции  $S^T$ . Область генерации ответственна как за формирование потоков уединенных дискретных точек  $r_k$ , так и за формирование суммарных коррелированных потоков  $G^a(\lambda)$ ,  $G^b(\lambda)$  соответственно «слева» и «справа» вдоль прямой, на которой расположены источники генерации коррелированных квантов, распространяющихся в противоположных направлениях. Предполагается, что число источников на прямой  $L$  равно  $n$  и каждая точка  $r_k$  в каждый момент времени  $\lambda$  может испускать кванты, число которых определяется из следующего условия:

$$X(r_k, \lambda) = m, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{m-1} P_i < P_R(\lambda) \leq \sum_{i=0}^m P_i, \quad (20)$$

где  $P_i = P_i(a(r_k)) = (a(r_k))^i / i! \exp(-a(r_k))$ , а  $P_R(\lambda)$  — значение генератора случайных чисел для момента времени  $\lambda$ , которое изменяется в интервале  $[0,1]$ . На рис.5,а представлена схема определения (для каждого момента времени) числа  $m$ , действующая на основании условия формулы (20). Это позволяет оценить статистическое изображение, которое формируется как предел от ношения общего числа генераций к продолжительности всего вычислительного эксперимента:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N^s(r_k, \lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\lambda} X(r_k, \lambda)}{\lambda} = a(r_k). \quad (21)$$



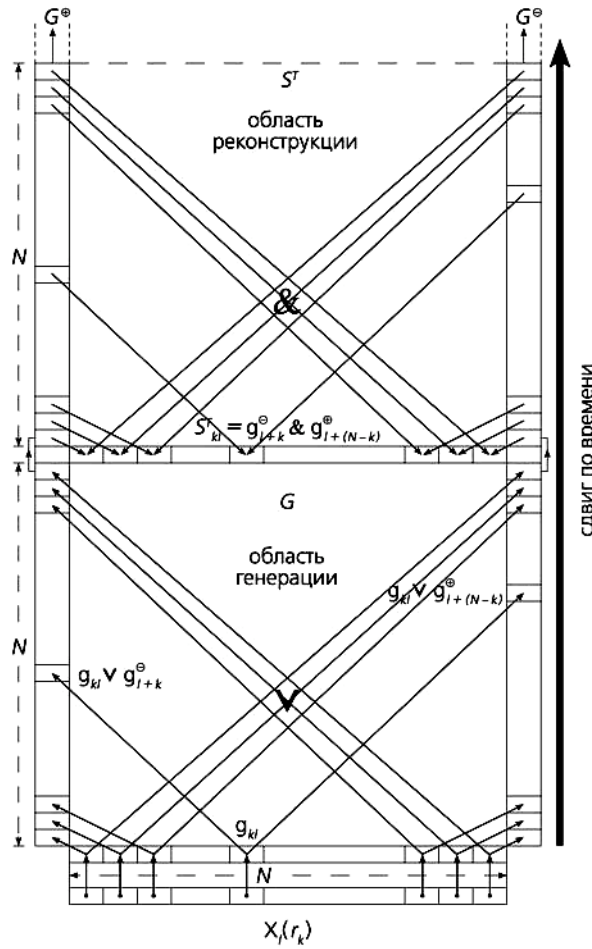


Рис.4. Принципиальная схема моделирования эксперимента по стохастической томографии. Функционально схема состоит из двух частей: область генерации  $G$  и область реконструкции  $S^T$ ,  $N$  — число разбиений (источников) на прямой  $L$ .

Как показано на рис.5,б, характер (степень случайности) генераций в каждом вычислительном эксперименте можно контролировать. Вычислительный эксперимент происходит в течение конечного времени, и реально это изображение получается как отношение  $N^S(r_k, \lambda) / \lambda$ . Формирование потока квантов каждой точкой  $r_k$  в данной схеме соответствует формированию элементов матрицы  $G(r_k, \lambda)$ , которые принимают только два значения:

$$g_{k,\lambda} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \quad (0, \text{ если } m = 0, \text{ и } 1, \text{ если } m > 0), \tag{22}$$

и эти элементы используются для получения эмиссионного изображения методом накопления элементов  $g_{k,\lambda}$  в каждой точке, т.е.

$$N^g(r_k, \lambda) / \lambda = \sum_{\lambda} g_{k,\lambda} / \lambda.$$

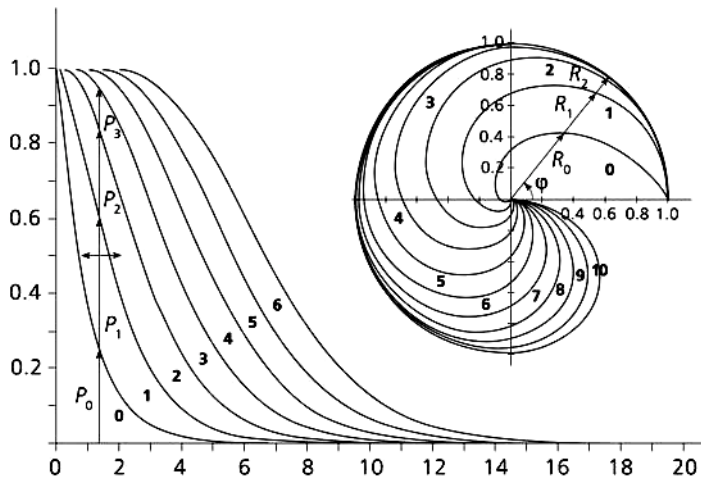


Рис.5,а. Схемы иллюстрации процесса формирования искусственного потока на стадии определения числа генераций квантов для формирования исходного статистического изображения — атласа. Оба способа позволяют определить число генерации  $n_\lambda$  для заданного параметра потока  $\alpha$  по области выпадения значения генератора случайных чисел  $P_R$ .

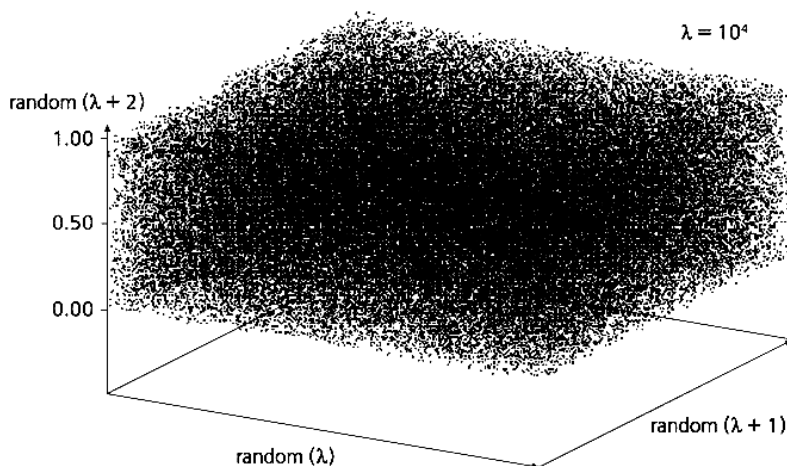


Рис.5,б. Формат тестирования генератора случайных чисел, который характеризует и проверяет «стохастичность» работы генератора при формировании искусственного моделируемого потока событий. Каждый вычислительный эксперимент по стохастической томографии сопровождается формированием «изображения» работы генератора случайных чисел.

По сути, это изображение есть изображение, сформированное в течение всего эксперимента. В предположении, что каждый элемент  $g_{k,\lambda}$  получен для текущего времени  $\lambda$ , формирование элементов одномерной суммарной матрицы  $G^0(\lambda)$  происходит также для текущего значения  $\lambda$  и, как показано на рис.4, формирование элементов суммарных матриц  $G^\ominus(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$  происходит следующим образом:

$$g_{\lambda}^{\ominus} = \bigvee_{k'=1}^n g_{k',\lambda-k'} \quad \text{и} \quad g_{\lambda}^{\oplus} = \bigvee_{k'=1}^n g_{k',\lambda-(n-k')} \quad (23)$$

соответственно, где  $\vee$  — знак логического сложения (дизъюнкции). Эти же формулы могут быть записаны в более удобной форме:

$$g_{\lambda+k}^{\otimes} = \bigvee_{k'=1}^n g_{k',\lambda-(k'-k)} \quad \text{и} \quad g_{\lambda+(n-k)}^{\otimes} = \bigvee_{k'=1}^n g_{k',\lambda+(k'-k)}. \quad (23^*)$$

Область реконструкции  $S^T$  служит для формирования изображения, соответствующего методу СКК. Формирование этого изображения осуществляется посредством логического умножения матриц  $G^{\bar{a}}(\lambda) \& G^{\bar{a}}(\lambda)$ . Элементы получаемой таким образом матрицы состояния определяются следующим образом:

$$S_{k,\lambda}^T = g_{\lambda+k}^{\otimes} \& g_{\lambda+(n-k)}^{\otimes} \quad \text{или} \quad S_{k,\lambda}^T = \bigvee_{k'=1}^n g_{k',\lambda-(k'-k)} \& \bigvee_{k'=1}^n g_{k',\lambda+(k'-k)}. \quad (24)$$

Сформированная подобным образом матрица  $S^T(r_k, \lambda)$  непосредственно используется для получения изображения методом СКК, что имеет место в электронно-позитронной томографии (РТ). Число совпадений состояний, регистрируемых в матрицах  $G^{\bar{a}}(\lambda)$ ;  $G^{\bar{a}}(\lambda)$  для каждой точки  $r_k$  в течение всего эксперимента, определяется по формуле

$$N^{st}(r_k, \lambda) = \sum_{\lambda} S_{k,\lambda}^T. \quad (25)$$

Все изображения, формируемые по данной схеме, являются одномерными (вдоль продольной координаты). Алгоритм проведения вычислительного эксперимента остается таким же и для любой прямой на продольном сечении, если сечение представить как совокупность параллельных линий. Потоки, формируемые вдоль каждой параллельной прямой, независимы и не влияют друг на друга. Для проведения вычислительного эксперимента была создана компьютерная многоканальная анализирующая система, в которой предусмотрен ввод-вывод оперативной двумерной информации. Идеология построения многоканальных систем позволяет визуализировать изображения, получаемые на всех стадиях эксперимента, с соответствующей справочной информацией об условиях работы про граммы на том или ином этапе. И все это отображается на специально разработанном протоколе эксперимента. На рис.6, 7 показаны результаты математического моделирования и вычислительного эксперимента по восстановлению объемной информации, стохастической по природе, для различных этапов. Эти результаты получены для различных значений продолжительности времени проведения эксперимента. По сути, последовательность приведенных изображений соответствует этапам процесса стохастической томографии, а эти этапы, кроме последнего, идентичны этапам позитронной томографии (РТ). Поэтому протоколы работы по математическому моделированию и вычислительному эксперименту позволяют сравнивать возможности позитронной томографии и стохастической томографии. Такой подход позволяет не только количественно, но и качественно, визуальнo оценить преимущество стохастической томографии. Было проведено большое количество экспериментов для сравнения с учетом многих особенностей и условий проведения натуральных исследований. Как видно из рис.6 и 7, протоколы для наглядности сопровождаются количественной, начальной, текущей и конечной информацией о режимах функционирования.

На рис.8 представлены характерные результаты наиболее типичного эксперимента по стохастической томографии для трех режимов работы. В качестве примера представлен срез легких (анатомический атлас поперечного сечения) с некоторыми патологиями. Результаты представлены в виде двумерных нормированных «изображений» эмиссионно-активной среды, и показано, как они видоизменяются при прохождении последовательно по всем (четырем) этапам моделирования. Приведены результаты трех экспериментов для различных параметров суммарного потока. На первом этапе компьютерного эксперимента на рис.8 показан анатомический атлас сечения (истинное изображение), а на втором этапе представлено

изображение статистической активности сечения, которое определяется только числом генераций  $N^s = N^s(r_k, \lambda)$  в каждой точке за время  $\lambda$  проведения эксперимента. Фактически это изображение соответствует статистическому проявлению эмиссионно-активного сечения. На третьем этапе моделирования формируется изображение сечения, полученное непосредственно методом СКК, и определяется число совпадений квантов  $N^{st}(r_k, \lambda)$ .

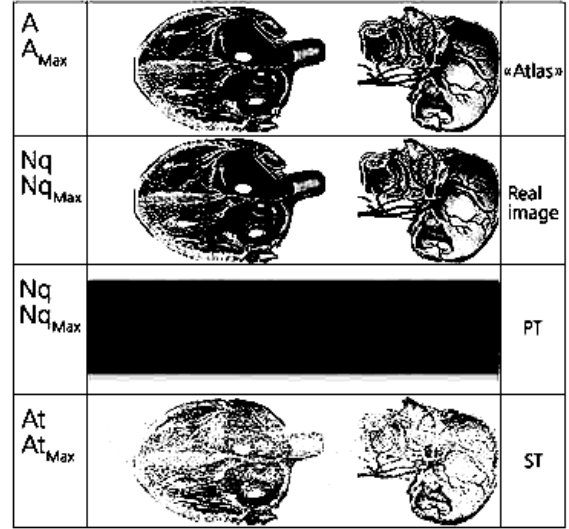
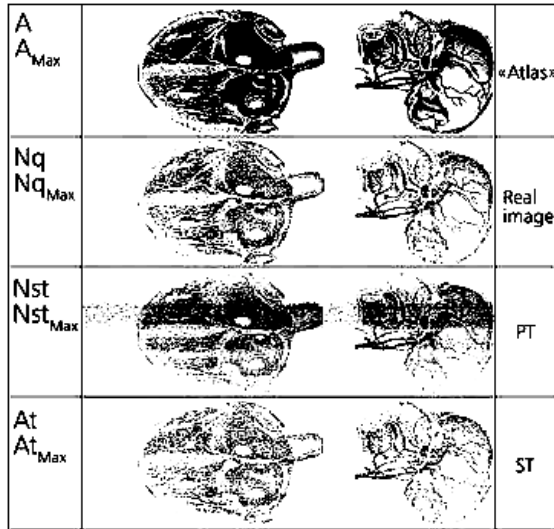


Рис.6. Протокол эксперимента по стохастической томографии двумерного объекта исследования, где показаны все условия и результаты работы на всех стадиях для параметра суммарного потока  $a = 1/256$  при продолжительности времени эксперимента, равной  $\lambda = 10^6$ . Все изображения нормированы к максимальному значению. «Atlas» — первоначальное изображение, соответствующее анатомическому срезу, **Real image** — статистическое изображение, сформированное в течение времени проведения эксперимента, **PT** — изображение, формируемое методом СКК и **PT**, **ST** — изображение, формируемое при стохастической томографии.

Рис.7. Протокол эксперимента по стохастической томографии двумерного объекта исследования, где показаны все условия и результаты работы на всех стадиях для параметра суммарного потока  $a = 1$  (квазирегулярный режим) при продолжительности времени эксперимента, равной  $\lambda = 10^6$ . Все изображения нормированы к максимальному значению. «Atlas» — первоначальное изображение, соответствующее анатомическому срезу, **Real image** — статистическое изображение, сформированное в ходе эксперимента, **PT** — изображение, формируемое методом СКК и **PT**, **ST** — изображение, формируемое при стохастической томографии.

В частности, для значений параметра суммарного потока, равных 0,1 и 1, изображения, полученные на третьем этапе, насыщены, что подтверждает формула (15) и рис.3. Как показывает эксперимент, если для значений пара метра суммарного потока, меньших, чем  $1/n$ , где  $n = 512$ , полученное на этом этапе изображение соответствует истинному изображению, то для значений 0,1 и 1 они далеки от сходства. И, наконец, на четвертом этапе получают изображения  $a^{st} = a^{st}(r_k, \lambda)$ , формируемые целиком и полностью из данных, получаемых на третьем этапе с помощью выражения (19). Как показывают результаты компьютерного эксперимента, соответствие изображений, полученных на этом этапе, первоначальным изображениям сохраняется для всех трех значений параметра суммарного потока. При этом оценивается пара метр подобия  $\Pi = \Pi(N^s/\lambda, a^{st})$  для всех случаев, где  $a^{st} = a^{st}(r_k, \lambda)$ , который в свою очередь является одним из основных измеряемых параметров и в классической томографии.



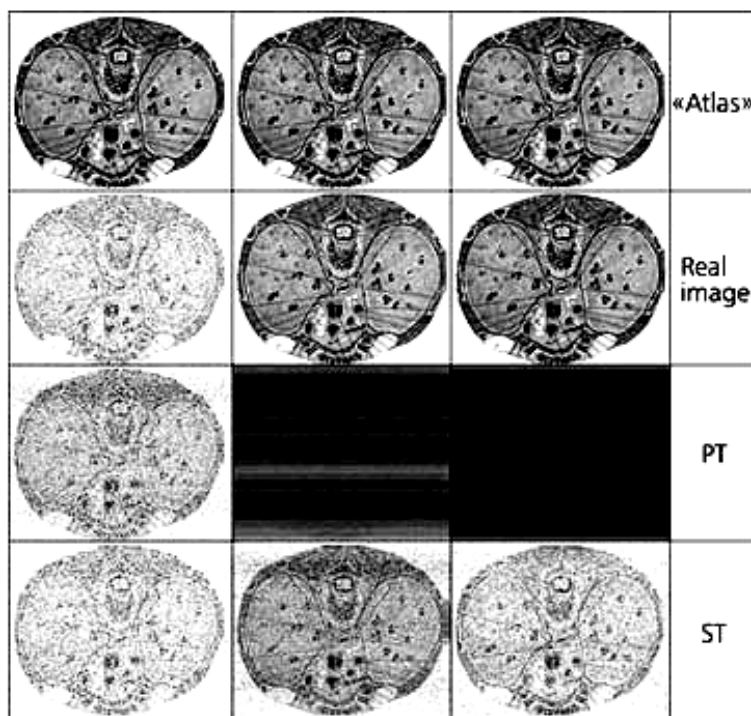


Рис.8. Результаты математического моделирования и компьютерного эксперимента по стохастической томографии двумерного изображения эмиссионно-активной среды для различных параметров суммарного потока.  $N^g(r_k)$  — число генераций,  $N^{st}(r_k)$  — число совпадений для измерений методом СКК.  $\Pi$  — параметр подобия и  $a^{st}(r_k, \lambda)$  — параметр потока, оцениваемый по формуле (19). (а)  $a = 1/512$ ,  $\lambda = 10^6$ ,  $\Pi = 0,3440$ ; (б)  $a = 1/10$ ,  $\lambda = 10^6$ ,  $\Pi = 0,3560$ ; (в)  $a = 1$ ,  $\lambda = 1,5 \cdot 10^6$ ,  $\Pi = 0,2000$ . «Atlas» — первоначальное изображение, соответствующее анатомическому срезу, **Real Image** — статистическое изображение, сформированное в течение ходе эксперимента, **PT** — изображение, формируемое методом СКК и PT, **ST** — изображение, формируемое при стохастической томографии.

### Реконструктивная формула для хромотомографии

Результаты исследования стохастической томографии, в том числе и компьютерное моделирование, позволяют утверждать, что предложенный метод есть, в свою очередь, способ хронометрии, который позволяет проводить измерения по продольной (объемной) координате, т.е. по времяпролетному принципу. Следовательно, он может быть использован как хронометрический метод в томографии. В частности, полученные результаты моделирования позволяют сформулировать техническое задание для разработки основных узлов соответствующего хромотомографа. В данном случае построение теории хромотомографии основано на том, что наиболее общей физической характеристикой для хронометрических систем, в частности для систем нелинейно-оптической диагностики, является аппаратная функция, которая определяется единственным и основным физическим параметром, — точностью измерения. Если предположить, что такая система имеет аппаратную функцию, определяемую как гауссова, т.е.

$$b(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right), \text{ где } \tau = r/c, \sigma^2 = \left(\frac{\Delta\tau^2}{\ln 2}\right),$$



а  $\Delta t$  есть точность, с которой проводятся временные измерения, то эта функция устанавливает взаимосвязь между истинным и измеряемым параметрами с помощью интеграла свертки:

$$a^T(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x', y') b(\tau - \tau') d\tau'. \quad (26)$$

Фактически решение этого интегрального уравнения есть решение задачи хромотомографии, которое и было получено использованием ПХ. После несложных математических операций можно найти выражение для истинного значения параметра потока  $a(x, y)$  по измеряемому параметру потока  $a^T(s, \tau, \varphi)$ , т.е.

$$a(x, y) = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds' a^T(s', \tau, \varphi) Q(s - s'), \quad (27)$$

которое есть реконструктивная формула хромотомографии, где

$$Q(s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{H(\omega)} \text{cas}(2\pi\omega s), \quad \omega = v/2\pi \quad \text{и} \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt b(\tau) \text{cas}(2\pi\omega\tau).$$

Это выражение хорошо согласуется с результатом решения реконструктивной задачи с учетом конечности скорости распространения сигнала объемной информации, которое получено непосредственно. Формула (27) может быть преобразована к более удобному виду без использования хартли-образа аппаратной функции  $H(\omega)$ :

$$a(x, y) = \pi \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds' a^T(s', \tau, \varphi) b(s - s') Q_0(s - s'), \quad (28)$$

где

$$Q_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\omega| \text{cas}(2\pi\omega s),$$

и эта формула является общей, в том числе и для всех лазерных хромотографов с характерной точностью проведения временных измерений  $\Delta t$ . Для томографов, в которых используются методы нелинейно-оптической диагностики, формулы (27) и (28) являются реконструктивными формулами хромотомографии, которые могут быть успешно использованы для компьютерных хромотографов, так как методика расчетов интегралов свертки в этих формулах для компьютерной томографии — достаточно отработанная и развитая область [2].

\* \* \*

Использование вероятностной стохастической теории — теории потоков для описания эмиссионно-активных сред — позволяет теоретически обосновать принципиальную новую возможность получения объемной информации, как для непрерывных коррелированных потоков квантов, так и для реальных дискретных потоков. Математическое моделирование и компьютерный эксперимент показывает, что стохастическая томография может быть использована для создания хромотографа времяпролетного типа. В частности, выражения (19) и (28), которые устанавливают взаимосвязь между измеряемыми и истинными параметрами, могут быть использованы для описания нелинейно-оптических объемных свойств среды, т.е. для томографии, где стохастичность реконструируемой среды является определяющим информационным признаком, и он может быть эффективно использован.

Автор выражает глубокую признательность профессорам Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова Ю.П. Пытьеву, А.С. Чиркину и А.И. Чуличкову за благожелательное внимание к результатам работы, а также за ценные и полезные советы, которые способствовали существенному улучшению оформления этой статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Radon J. // *Ver. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Math. — Phys. Kl.* 1917k. V.69. P.262.
- 2 Наттерер Ф. *Математические аспекты компьютерной томографии.* М., 1990.
- 3 Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. *Курс теории вероятности и математической статистики для физиков.* М., 1983.
- 4 Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания.* М., 1987. С.336.
- 5 Брейсуэлл Р. *Преобразование Хартли.* М., 1990.
- 6 Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике.* М., 1990. С.832.
- 7 Каримов М.Г. *Теория коррелированных квантовых потоков и ее использование для реконструктивных задач.* Махачкала, 1999. С.102.
- 8 Karimov M.G. // *Pattern Recognition and Image Analysis.* 2000. №1. V.10. P.168—175.
- 9 Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статическую радиофизику и оптику.* М., 1981.
- 10 Пытьев Ю.П. *Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем.* М., 2004.

