

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ ТИПА «РЕАКЦИЯ—ДИФФУЗИЯ»

А.И. Лобанов, Т.К. Старожилова, А.П. Черняев

Алексей Иванович Лобанов, доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики Московского физико-технического института. Руководитель проекта 99-01-01145.

Татьяна Константиновна Старожилова, кандидат физико-математических наук, доцент той же кафедры.

Александр Петрович Черняев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики того же института.

Текст статьи публикуется в авторской редакции

Изучаются условия, при которых в системах уравнений типа «реакция—диффузия» возникает «диффузионный резонанс» и родственные ему резонансные явления. Исследуется явление параметрического резонанса в случае электровоздействия на эту систему. Оба резонансных явления подтверждаются численно.

Уравнения типа «реакция—диффузия» имеют вид [1, 2].

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = f_i(\mathbf{N}) + \operatorname{div}(D(N_i, \mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} N_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где N_i — неизвестные, f_i , D — известные функции. В правой части (1) $f_i(\mathbf{N})$ описывает взаимоотношение между множествами с мощностями N_i , а второе слагаемое — перемещение элемента множества.

Частными случаями (1) являются уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова [3] (задача о «диффузии гена»); «реакционно-диффузионная» модель «брюсселятор» [4]; одна из возможных моделей реакции Белоусова—Жаботинского — «орегонатор» [5]; модель Гаузе—Витта [6, 7]; модель гликолиза Селькова и как ее вариант модель Грея—Скотта [8, 9]. Уравнения типа «реакция—диффузия» активно используются при моделировании биологических и химических систем.

Один из примеров приложения систем вида

(1) — описание механизмов образования пространственно-неоднородных стационарных распределений реагентов, участвующих в химических реакциях и в диффузионных процессах.

Такие решения «реакционно-диффузионных» уравнений называются диссипативными структурами. Другим примером применения систем (1) является моделирование автоволновых процессов, которые можно интерпретировать как пространственно-временные структуры. Исследованию свойств таких решений в модельной системе уравнений, получению условий, достаточных для их существования, иллюстрациям резонансных явлений посвящена работа [10]. В ней рассмотрен случай внутреннего резонанса в модели свертывания крови.

Конвективные члены, добавленные в систему типа «реакция—диффузия» могут оказать существенное влияние на процессы структурообразования. Эти слагаемые описывают химические реакции с учетом гидродинамических потоков [11, 12]. Недавно появился новый класс моделей типа «реакция—диффузия» с гиперболическими слагаемыми, описывающих химические системы, находящиеся под воздействием внешнего электрического поля [13—17]. Реагенты в таких системах являются заряженными ионами и участвуют не только в реакционно-диффузионных процессах, но и в движении в электрическом поле. В [18] показано, что даже в линейном приближении при выполнении не которых соотношений на частоты внешнего воздействия и параметры химической части системы возможно формирование неоднородных структур за счет резонанса.

Двухкомпонентная система уравнений типа «реакция—диффузия». «Двухволновая» модель свертывания крови

Рассмотрим двухкомпонентную модельную систему типа «реакция—диффузия». Покажем, что если матрица Якоби соответствующей точечной реакционной системы эквивалентна жордановой клетке, а коэффициенты диффузии равны, то в такой системе могут наблюдаться резонансные эффекты. Численные расчеты по «двухволновой» модели свертывания крови иллюстрируют полученные результаты. Линейный анализ модельной системы. Линеаризуем двухкомпонентную модельную систему уравнений типа «реакция—диффузия» в окрестности пространственно-однородного решения. Линейное приближение (в безразмерной форме) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au + bv,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cu + dv.$$

Здесь $u = u(t, x)$, $v = v(t, x - x_0)$, а константы a, b, c, d вычисляются как соответствующие компоненты матрицы Якоби

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0, 0).$$

Коэффициент диффузии для первого вещества можно положить равным единице за счет выбора масштабов независимых переменных — длины и характерного времени процесса. Для системы (2) рассматривается задача Коши.

После взятия преобразования Фурье по переменной x в интегральной форме [19] и введения обозначений

$$\begin{aligned} X(t, k) &= F_x[u(t, x)](t, k), \\ Y(t, k) &= F_x[v(t, x - x_0)](t, k) \end{aligned}$$

мы из (2) получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= (a - k^2)X + be^{ix_0 k} Y, \\ \frac{dY}{dt} &= ce^{-ix_0 k} X + (d - k^2 D)Y. \end{aligned} \quad (3)$$

После записи системы (3) в векторном виде $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = (X, Y)^T$, мы находим собственные числа матрицы \mathbf{A} из характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$:

$$\lambda^2 + ((1 + D)k^2 - (a + d))\lambda + (a - k^2)(d - k^2 D) - bc = 0. \quad (4)$$

Дисперсионное соотношение (4) известно [20—22] и появляется при исследовании линейного приближения для нахождения неоднородных диссипативных структур, при исследовании потери устойчивости пространственно-однородного стационарного решения. Случай различных λ подробно исследован в классической работе Тьюринга [20]. Рассматривая случай кратного корня

$$\lambda = \frac{1}{2} [(a + d) - (1 + D)k^2],$$

получаем, что при этом должно выполняться условие

$$[(1 - D)k^2 - (a - d)]^2 = -4bc.$$

Если решение системы (3) искать в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \gamma + \delta t \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

то для α, β, γ и δ получается линейная система [14], из которой в силу (6) следует, что при $D > 1, d \geq a, bc \leq 0$ существуют волновые числа, такие что

$\tilde{k}^2 = [(d - a) \pm 2\sqrt{-bc}]/(D - 1) > 0$, при которых система уравнений для определения α , β , γ , δ имеет нетривиальное решение, а при остальных k решение нулевое. Обратить систему (3) можно, но для этого $X(t, k)$ и $Y(t, k)$ должны быть сингулярными функционалами, сосредоточенными на прямых (t, k) и $(t, -k)$. Этот случай соответствует образованию структур Тьюринга [20].

В случае $D = 1$ условие существования нетривиального решения (6) имеет вид

$$(a - d)^2 = -4bc. \quad (7)$$

Оно не зависит от волнового числа k , следовательно, в этом случае уже нет «выделенных» гармоник возмущения. Из (7) следует условие существования решения $bc \leq 0$, совпадающее с аналогичным условием в случае $D > 1$.

Условие (7) означает, что матрица системы (2) эквивалентна жордановой клетке, т.е. существует не особая замена переменных, такая что система (2) переходит в

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a'p + b'q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a'q. \end{aligned}$$

Задача Коши для (8) имеет решение [10]:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{C_1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{4a't^2 - x^2}{4t}\right\} + \frac{C_2}{2\sqrt{\pi t}} b'tq(t, x), \\ q(t, x) &= \frac{C_2}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{4a't^2 - (x - x_0)^2}{4t}\right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы, определяемые из начальных условий.

Второе слагаемое правой части первого равенства (9) описывает «диффузионный резонанс» и может быть записано в виде

$$b't \exp\{a't\} \cdot \left(\frac{C_2}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2}{4t}\right\} \right). \quad (10)$$

Первый множитель (10) — функция времени — «резонанс», а второй фундаментальное решение оператора теплопроводности. Считаем, что в (10) $C_2 > 0$.

При $b' > 0$ происходит возрастание концентрации вещества (10) вплоть до времени $-1/a'$. Если $a' > 0$, то при $b' < 0$ возможно быстрое «резонансное» уничтожение вещества p или при $b' > 0$ рост концентрации быстрее экспоненциального. При этом характерная скорость распространения возмущений в системе $V = 2\sqrt{a'}$ совпадает со скоростью распространения волны Колмогорова—Петровского—Пискунова [3].

Найденное решение при $D = 1$ можно использовать как член нулевого порядка для построения решения в виде асимптотического ряда по ε в случае приближенного равенства коэффициентов диффузии: $D = 1 + 2\varepsilon \approx 1$. Если ε достаточно мало, то при начальных возмущениях вида $\exp(-x^2/x_0^2)$ процесс будет развиваться аналогично. Анализ модели свертывания крови. В качестве примера приложения приведенного выше анализа рассмотрим двухволновую модель свертывания крови [23—25]. Модель получила рабочее название «двухволновая» из-за того, что распространение по пространству и активатора процесса свертывания (первое уравнение системы (11)), и ингибитора процесса носит автоволновой характер. При этом формирование фибринового сгустка (тромба) происходит в результате взаимодействия двух автоволн. Система уравнений в безразмерной форме имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D\Delta u + \frac{u^2}{u+1} - \chi u - \gamma uv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v + bu(1 - \varepsilon v)(1 + v^2) - \kappa v. \end{aligned} \quad (11)$$

Характерные значения констант, использовавшиеся в численных экспериментах: $b = 0.03$; $\gamma = 0.131$; $\kappa = 0.131$; $\chi = 0.025$; $\varepsilon = 0.01$; $D = 0.0003$.

Отметим, что коэффициент диффузии D в (11) может быть приведен к единице выбором нового масштаба по пространственной переменной x .

Матрица Якоби реакционной части системы имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \chi - \gamma v - \frac{1}{(u+1)^2} & -\gamma u \\ b(1 - \varepsilon v)(1 + v^2) & bu(2v - \varepsilon(1 + 3v^2)) - \kappa \end{pmatrix}.$$

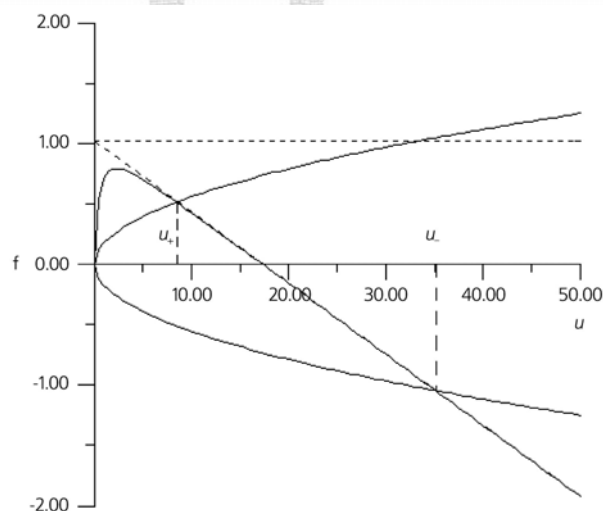


Рис.1. К решению уравнения (12). Пунктиром показаны прямые: $f(u) = 1 - \chi + \kappa - \gamma v$, $f(u) = 1 - \chi + \kappa - \gamma v - bu(2v - \varepsilon(1 + 3v^2))$; сплошными линиями — кривые соответствующие правой и левой частям уравнения

Условие возникновения «резонанса» (7) запишется в виде:

$$\left[1 - \chi + \kappa - \gamma v - bu(2v - \varepsilon(1 + 3v^2)) - \frac{1}{(u+1)^2}\right]^2 = 4\gamma bu(1 - \varepsilon v)(1 + v^2). \quad (12)$$

Для существования таких значений u^* , v^* , чтобы (12) выполнялось, нужно потребовать выполнения условия $v^* < 1/\varepsilon$.

В начальных условиях численных экспериментов с системой (11) присутствовал лишь активатор свертывания u [24]. При $v = 0$ и значениях параметров, близких к указанным, решений уравнения (12) нет. Но при $v_1 = (1 - \sqrt{1 - 3\varepsilon^2})/(3\varepsilon) \approx \varepsilon/2$ слагаемое $bu(2v - \varepsilon(1 + 3v^2))$ меняет знак. Для любого фиксированного значения $v^* > v_1$ уравнение (12) имеет два корня, $u_+(v^*) < u_-(v^*)$, см. рис.1. С увеличением v значения u_+ и u_- уменьшаются. Таким образом, в системе возникает некоторый порог по значению концентрации ингибитора. Отметим, что в большинстве «классических» задач, решениями которых являются автоволны и диссипативные структуры, существенно лишь наличие пороговых значений концентрации активатора.

Качественно процессы в системе развиваются следующим образом. В начале возмущение по активатору u «расплывается» и растет автокаталитически как решение уравнения теплопроводности с линейным источником. При этом происходит наработка ингибитора с его «расплыванием». Если концентрация веществ достигает значений v^* , $u_+(v^*)$, происходит резкое нарастание неоднородности по активатору. На этой стадии уже не работает линейное приближение.

После «вспышки» включаются нелинейные механизмы ингибирования. Неоднородности уменьшаются. Через некоторое время при достижении ингибитором и активатором средних по пространству значений концентраций v_1^* , $u_1+(v_1^*)$ снова наблюдается «вспышка». Интересно, что в численных расчетах [24, 25] удается наблюдать и «вспышки» в окрестности $u_-(v^*)$. При этом процессы в системе развиваются гораздо быстрее. Примеры численных расчетов. Подобными резонансными механизмами можно объяснить существование экзотических решений системы (11), не характерных для большинства систем типа реакция—диффузия. После второй «вспышки» образуются две неоднородности по активатору в виде «холмов», распространяющихся в противоположных направлениях, рис.2,а,б. При этом «холм» активатора, движущийся к месту первой «вспышки», где еще осталось не большое количество ингибитора, вновь начинает расти. Возмущение, распространяющееся в область, где ингибитора нет, затухает и стремится к состоянию $u = 0$, $v = 0$. В результате третья «вспышка» происходит на месте первой, рис.2,в.

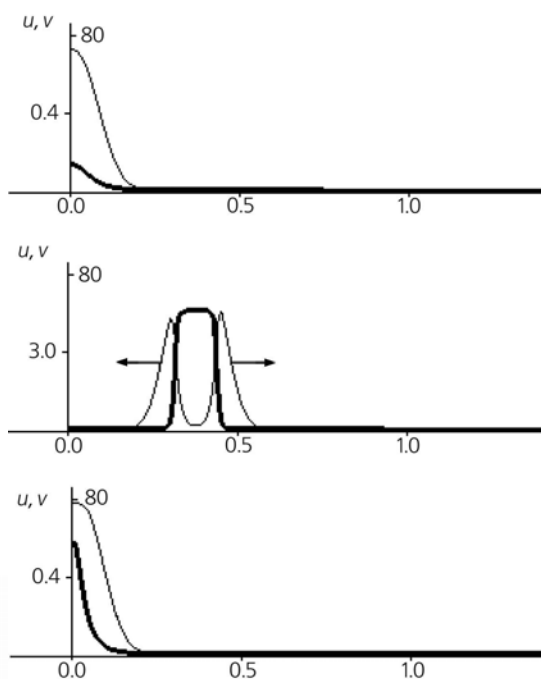


Рис.2. а — Первая «вспышка» активатора ($t = 22$). Распределения активатора и ингибитора показаны тонкой и жирной линиями соответственно. б — Вторая «вспышка» активатора ($t = 40$). Стрелками показаны направления движения «холмов» активатора. в — Третья «вспышка» активатора ($t = 106$).

Такой сценарий взаимодействия активатора и ингибитора может повторяться несколько раз. Все пространство делится на две области, где возмущения дают «вспышки» и где они исчезают. Причем повторные «вспышки» происходят в той области, где от их предшественников осталось немного ингибитора.

Параметрический резонанс и формирование диссипативных структур в двухкомпонентной системе при воздействии периодического электрического поля

Рассматривается математическая модель формирования диссипативных структур в растворе электролитов под влиянием наложенного на систему внешнего периодического электрического поля. На основе анализа модельной линейной системы уравнений найдены условия возникновения параметрического резонанса, приводящего к образованию диссипативных структур. Эффект иллюстрируется численно для модифицированной системы «брюсселятор». При таком резонансе возможно формирование диссипативных структур, когда система устойчива по Тьюрингу. Модельная система. Линейный анализ. Пусть n_1 — концентрация положительных ионов, n_2 — отрицательных. Уравнения пространственно-временной динамики распределений ионов записаны в безразмерном виде [18]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} - B_1 E_{\text{out}} \frac{\partial n_1}{\partial x} - B_1 E_s \frac{\partial n_1}{\partial x} - \frac{B_1}{\varepsilon} n_1(n_1 - n_2) + f_1(n_1, n_2), \\
\frac{\partial n_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2} + B_2 E_{\text{out}} \frac{\partial n_2}{\partial x} + B_2 E_s \frac{\partial n_2}{\partial x} - \frac{B_2}{\varepsilon} n_2(n_2 - n_1) + f_2(n_1, n_2), \\
\frac{\partial E_s}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon} (n_1 - n_2),
\end{aligned} \quad (13)$$

где D_1, D_2 — коэффициенты диффузии, B_1 и B_2 — подвижности ионов, ε — диэлектрическая проницаемость среды, E_{out}, E_s — напряженности внешнего и самосогласованного полей соответственно. Внешнее поле является заданной функцией лишь времени, так как из условия $\text{div} E_{\text{out}} = 0$ оно не зависит от координаты x .

Введем новые переменные $u = n_1 - n_{10}, v = n_2 - n_{20}$. Фактически мы линеаризуем систему в окрестности равновесия, когда выполнено условие $f_1 = 0, f_2 = 0$. В первом порядке малости по u, v должно выполняться условие электронейтральности. С учетом этого в новых обозначениях:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e_0 \cos(\omega t) \frac{\partial u}{\partial x} + f_1(u, v), \\
\frac{dv}{dt} &= D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D e_0 \cos(\omega t) \frac{\partial v}{\partial x} + f_2(u, v),
\end{aligned} \quad (14)$$

где $D = D_2/D_1$, а ω и e_0 — частота и амплитуда внешнего поля.

Система (14) может описывать, например, реакции в при мембранном слое. Параметрическое воздействие с частотой ω обеспечивается колебаниями электрического поля в падающей на мембрану плоско-поляризованной электромагнитной волне с плоскостью поляризации, параллельной плоскости мембраны [18]. Различные подвижности ионов учитываются введением коэффициента D — отношения подвижностей ионов. Обычно в таких системах существенную роль играют легкие протоны, обладающие высокой подвижностью, и какие-либо более тяжелые ионы. Линеаризуем (14) в окрестности устойчивого положения равновесия точечной системы $(u, v) = (0, 0)$, получаем систему:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e_0 \cos \omega t \frac{\partial u}{\partial x} + au + bv, \\
\frac{dv}{dt} &= D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D e_0 \cos \omega t \frac{\partial v}{\partial x} + cu + du,
\end{aligned} \quad (15)$$

в которой константы a, b, c, d вычисляются как соответствующие компоненты матрицы Якоби

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} (0, 0).$$

Для (15) рассматривается задача Коши. После преобразование Фурье в интегральном смысле [18, 19] получаем линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -k^2U + ike_0\cos\omega tU + aU + bV, \\ \frac{dV}{dt} &= -Dk^2V - ike_0D\cos\omega tV + cU + dV. \end{aligned} \quad (16)$$

Подразумевая выполнение устойчивости системы по Тьюрингу (соответствующее положение равновесия для «точечной» системы есть устойчивый фокус), имеем $\mu = (a + d)/2 < 0$, $-4bc - (a - d)^2 = v^2/4 > 0$, $v > 0$ — частота затухающих колебаний в системе. Исключая из системы (16) V , получаем уравнение для U :

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} + [(1 + D)k^2 + ike_0R\cos\omega t - (a + d)] \frac{dU}{dt} + \\ + [Dk^4 - (aD + d)k^2 + (ad - bc) + Dk^2e_0^2\cos^2\omega t]U + ike_0[(d - aD)\cos\omega t + \omega\sin\omega t]U = 0, \\ R = D - 1, \end{aligned} \quad (17)$$

которое мы разложим в ряд по степеням k

$$U = U_0 + kU_1 + k^2U_2 + \dots,$$

так как нам надо найти условие существования параметрического резонанса, и нас интересуют лишь крупномасштабные структуры, соответствующие малым значениям волнового числа k .

Коэффициенты ряда от k не зависят [18], а для первых двух из них справедливы уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_0}{dt^2} - 2\mu \frac{dU_0}{dt} + (ad - bc)U_0 = 0, \\ \frac{d^2U_1}{dt^2} - 2\mu \frac{dU_1}{dt} + (ad - bc)U_1 = ie_0[-R\cos\omega t \frac{dU_0}{dt} - (d - aD)\cos\omega tU_0 - \omega\sin\omega tU_0]. \end{aligned} \quad (18)$$

При выполнении условий устойчивости точечной системы по Тьюрингу имеем $U_0 = \exp\{\mu t\} \cdot (C_{10}\sin vt + C_{20}\cos vt)$, где константы C_{10} , C_{20} определяются из Фурье-образов начальных условий (16) путем разложения их в асимптотические ряды по k . Подставляя последнее соотношение во второе уравнение системы (18), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{dt^2} - 2\mu \frac{dU_1}{dt} + (ad - bc)U_1 = \frac{ie_0}{2} \exp\{\mu t\} [A_+\sin(v + \omega)t + B_+\cos(v + \omega)t + \\ + A_-\sin(v - \omega)t + B_-\cos(v - \omega)t], \end{aligned}$$

где

$$A_{\pm} = C_{10}(aD - d) - R(C_{10}\mu - C_{20}v) \pm C_{20}\omega, \quad B_{\pm} = C_{20}(aD - d) - R(C_{10}v - C_{20}\mu) \mp C_{10}\omega.$$

Резонанс возможен, когда одна из частот вынуждающей силы совпадет с собственной частотой колебаний системы. Это возможно в случае $\omega = \pm 2\nu$, тогда частное решение неоднородного уравнения представимо в виде:

$$U_{1n} = \frac{ie_0 t \exp\{\mu t\}}{4\nu} (B \cdot \sin \nu t + A \cdot \cos \nu t) - \frac{ie_0 t \exp\{\mu t\}}{16\nu^2} (A \cdot \sin 3\nu t + B \cdot \cos 3\nu t). \quad (19)$$

Из (19) следует, что при этом возбуждаются колебания с собственной частотой системы ν и с утроенной собственной частотой при воздействии на нее внешнего поля с частотой, вдвое превышающей собственную.

Результаты расчетов. Электрические взаимодействия учитывались в виде (13) при $D_1 = D_2 = D$, $B_1 = B_2 = B$, $f_1(n_1, n_2) = \alpha + n_1^2 n_2 - (\beta + 1)n_1$, $f_2(n_1, n_2) = n_1^2 n_2 + \beta n_1$. В качестве граничных условий были выбраны равенства нулю диффузионных потоков реагентов на границах отрезка интегрирования и периодичность потенциала самосогласованного поля (т.е. поля, создаваемого самими входящими в систему ионами) аналогично [14—17]. Основная масса численных экспериментов проведена при $D = 10^{-4}$; $B = 10^{-3}$; $\varepsilon = 1$; $\alpha = 2$; $\beta = 2,5$; все величины безразмерные. Константы в «реакционной» части «брюсселятора» соответствуют устойчивому фокусу в точечной модели. Из-за равенства коэффициентов диффузии неустойчивость Тьюринга также не проявляется, и в системе устанавливается пространственно-однородное стационарное состояние.

Рассматривая влияние электрического поля $E(t) = E_0 \cos \omega t$, получаем стационарное пространственно-однородное состояние в системе при малых амплитудах воздействия или высоких частотах.

В отличие от случая без электрического поля, на начальном этапе вместо случайно распределенного возмущения возникает малоамплитудная структура, которая со временем исчезает, так как влияет экспоненциальный множитель в (19). Однако при некоторых значениях амплитуды приложенного поля уменьшение амплитуды структур компенсируется ростом неоднородности за счет автокаталитических реакций. Возникает «почти стационарная» диссипативная структура. Ее образование при малом случайном начальном возмущении пространственно-однородного стационарного состояния показано на рис.3. Безразмерная амплитуда внешнего поля — 3,8; частота колебаний — 3,12.

При $B = 10^{-2}$ влияние самосогласованного поля существенно. Система становится более чувствительной к внешним воздействиям, и существенными становятся резонансные гармоники более высоких частот. Для частоты внешнего воздействия, равной 3,0, и

напряженности поля 0,8 образование периодически делящихся нестационарных структур показано на рис.4.

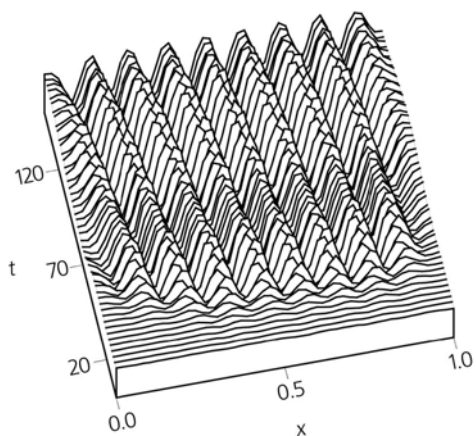


Рис.3. Нестационарные структуры в модели «брюсселятор», когда самосогласованным полем можно пренебречь. В системе образуется структура, испытывающая малые колебания с частотой приложенного поля.

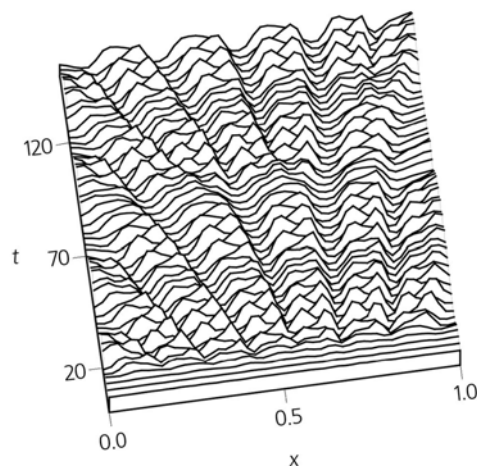


Рис.4. Нестационарные структуры в модели «брюсселятор», когда вклад самосогласованного поля велик. Видны возбужденные гармоники утроенной частоты, которые приводят к периодическому делению структур.

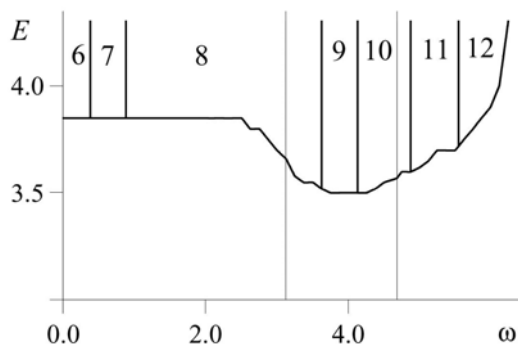


Рис.5. Зависимость структур, формирующихся в модели «брюсселятор», от амплитуды и частоты приложенного внешнего электрического поля. Цифрами обозначено число формирующихся структурных элементов.

Критическая величина амплитуды внешнего поля, при которой формируются неоднородности большой амплитуды, определяемой химическими параметрами «брюсселятора», зависит от частоты и имеет выраженный резонансный характер. На рис.5 приведена диаграмма решений в плоскости «частота—амплитуда» для $B = 10^3$. Независящая от волнового числа оценка резонансной частоты (19) показана пунктирной линией. Второй пунктирной линией показана частота 3ν .

В области амплитуд внешнего поля, показанных на рис.3, члены с самосогласованным полем не влияют на результат вычислений. Но при увеличении амплитуды члены, связанные с самосогласованным полем, сильно изменяют картину процесса. В системе наблюдаются делящиеся структуры, колебания с утроенной частотой и различные виды бегущих волн.

Заключение

Анализ модельной двухкомпонентной системы уравнений типа «реакция—диффузия» показал, что если матрица реакционной части системы эквивалентна диагональной, то механизм структуро-образования тьюринговский. Если же матрица эквивалентна жордановой клетке, имеет место «диффузионный резонанс». При этом ключевую роль в образовании структур активатора играет ингибитор, который и играет определяющую роль в образовании нестационарных структур [10].

Далее делается вывод о возможности возникновения нестационарных диссипативных структур в системе типа «реакция—диффузия» под влиянием внешнего периодического электровоздействия [18]. Однако остается открытым вопрос о классе нелинейных функций, описывающих кинетику химических реакций, допускающих построение диссипативных структур за счет параметрического резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Садыхов О.Ф., Бененсон П.Е. Динамика численности мелких млекопитающих. М., 1983.
- 2 Okubo A. Diffusion and ecological problems: Mathematical models. SpringerVerlag, 1980.
- 3 Колмогоров А.Н., Петровский П.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. математика и механика. 1937. Т.1. С.1—26.
- 4 Пригожин П. От существующего к возникающему. М., 1985.
- 5 Филд Р. Экспериментальные характеристики и механизм химических колебаний и бегущих волн в закрытых системах на основе бромата // Колебания и бегущие волны в химических системах. М., 1988. С.75—116.
- 6 Свирежев Ю.М. Диссипативные структуры, нелинейные волны и катастрофы в экологии. М., 1984.
- 7 Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М., 1978.
- 8 Pearson J.E. // Science. 1993. V.261. P.189—192.
- 9 Lee Kyong J., McCormic W.D., Ouyang Q., Swinney H.L. // Science. 1993. V.261. P.192—194.
- 10 Лобанов А.И., Старожилова Т.К., Черняев А.П. // Математическое моделирование. 1999. Т.11. №7. С.75—82.

- 11 Kuznetsov S., Mosekilde E., Dewel G., Borckmans P. // *J. Chem. Physics*. 1997. V.106. №18. P.7609—7616.
- 12 Lobanov A.I., Starozhilova T.K. // *Phystech Journal*. 1997. V.3. №2. P.96—105.
- 13 Ортолева П., Шмидт С. Взаимодействие волн с электрическим полем // *Колебания и бегущие волны в химических системах*. М., 1988. С.365—450.
- 14 Munster A.F., Hasal P., Snita D., Marek M. // *Phys. Rev. E*. 1994. V.50. №1. P.546—550.
- 15 Munster A.F., Waltz M. and Schneider F.W. // *Physica Scripta*. 1996. V.T67. P.58—62.
- 16 Sevcikova H., Kosek J. and Marek M. // *J. Phys. Chem*. 1996. V.100. P.1666—1675.
- 17 Schmidt B., Muller S. // *Phys. Rev. E*. 1997. V.55. №4. P.4391—4393.
- 18 Лобанов А.И., Старожилова Т.К., Черняев А.П. // *Журнал физической химии*. 2000. Т.74. №11. С.2087—2092.
- 19 Жуков А.И. Преобразование Фурье в вычислительной математике. М., 1992.
- 20 Turing A.M. // *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*. 1952. V.237. P.37—72.
- 21 Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М., 1997.
- 22 Карлов Н.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. Лазерная термохимия. М., 1995.
- 23 Атауллаханов Ф.И., Гурия Г.Т., Сафрошкина А.Ю. // *Биофизика*. 1994. Т.39. №1. С.97—104.
- 24 Лобанов А.И., Старожилова Т.К., Гурия Г.Т. // *Математическое моделирование*. 1997. Т.9. №8. С.83—95.
- 25 Лобанов А.И., Старожилова Т.К. // *Математическое моделирование*. 1997. Т.9. №12. С.3—15.