Глобальные решения дифференциальных уравнений

Г.И. Лаптев, Г.Г. Лаптев

Геннадий Иванович Лаптев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Тульского государственного университета. Руководитель проекта 01-01-00884.

Геннадий Геннадьевич Лаптев, кандидат физико-математических наук, докторант отдела теории функций Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Теоретическая математика представляет, пожалуй, одну из наиболее трудно внедряемых наук. Разумеется, многие могут не согласиться с этим тезисом, поскольку практически ни одна наука сегодня не обходится в той или иной мере без математики. Но дистанция между теоретической и прикладной математикой часто очень велика, и трудно объяснить, чем же все-таки занимаются «чистые» математики. В этой связи надо заметить, что якобы неактуальные на сегодняшний день теоретические задачи через десять, двадцать, сто лет могут неожиданно стать прорывным направлением и принести огромный научный и экономический эффект.

Создание И. Ньютоном и Г. Лейбницем в конце 17-го столетия основ дифференциального и интегрального исчисления явилось колоссальным шагом вперед и позволило создать математические модели многих объектов естествознания, изучавшихся до того в основном на экспериментальном уровне. Огромное число природных явлений получило наконец-то формулировку в виде дифференциальных уравнений.

В тот период казалось, что дифференциальные уравнения могут описать все что угодно. С другой стороны, сама процедура вывода дифференциального уравнения опиралась на некоторые известные из опыта постулаты, которые в ряде случаев сами по себе не были точными. Одной из важных в то время была задача о распространении тепла. Французский физик и математик Ж. Фурье вывел соответствующее уравнение теплопроводности, которое позволяло вычислить температуру любой точки тела в требуемый момент времени.

Это уравнение обладает одним интересным свойством. Предположим, мы нагреваем достаточно длинный стержень в центре. Естественно, что сначала будет нагреваться центральная область, а затем — окраины. Согласно же уравнению теплопроводности получалось: как бы мало мы ни нагревали центральную область, через любой сколь угодно малый момент времени нагреется весь стержень (нагреется очень слабо, но с математической точки зрения его температура будет отличаться от начальной).

Ряд нелинейных модификаций этого уравнения оказались особенно полезны при моделировании процессов теплопроводности, например самонагревании скоплений угля. Удивительно, что одно и то же уравнение описывает явления из физики, биологии, экономики. Наиболее интересной при этом оказывается возможность прогнозировать поведение описываемой дифференциальным уравнением системы.

Итак, предположим, что задана нелинейная система уравнений, описывающих некоторый физический процесс (зависящий от времени). Пусть также задана характеристика системы в начальный момент времени (математики называют это начальными условиями). Вопрос, который нас интересует, можем ли мы предсказать поведение этой системы на любой срок?

Вообще говоря, здесь возможны несколько вариантов, которые составляют сущность теории и которые можно хорошо понять на примере из популяционной генетики. Допустим, на необитаемый остров завезли травоядных и хищников. Начальное состояние системы (т.е. количество животных) нам известно. Здравый смысл подсказывает следующие возможные варианты развития.

Первый: после определенного первоначального колебания система приходит в устойчивое состояние, т.е. численность животных практически не меняется в течение длительного времени.

Второй: система (в силу каких-то дополнительных внешних причин) не может прийти в устойчивое состояние. В этом случае ситуация выглядит обычно следующим образом: в условиях большого количества травоядных хищники быстро размножаются, тогда как численность травоядных уменьшается и в какой-то момент хищникам перестает хватать корма, их численность падает, что в свою очередь приводит к росту популяции травоядных и т.д. Другими словами, наблюдается периодический рост и падение численности, но система никогда не приходит в устойчивое состояние.

Третий: в какой-то момент либо хищников становится слишком много, либо травоядных — слишком мало, и периодическое состояние уже невозможно. Все животные быстро погибают. Математики говорят, что решение разрушается.

За этими банальными примерами кроются глубокие принципы, описывающие большое число физических явлений. В современной науке такие задачи часто относят к области синергетики, выделяя при этом две особенности — возникновение порядка из хаоса и обратный процесс. Первая особенность иллюстрируется рассмотренным выше первым вариантом: численность хищников может варьироваться в достаточно широком диапазоне, и, несмотря на это, через определенное время она выйдет на (одно и то же) устойчивое состояние, т.е. из практически случайной начальной численности возникает строго определенное количество.

Обратимся теперь к более сложному случаю — возникновению хаоса из порядка. Здесь надо отметить, что если в системе нет никаких «случайных» элементов, то, конечно, задавая каждый раз одинаковые начальные условия, мы всегда приходим к одному и тому же результату. Однако система может быть некорректной, т.е. незначительная вариация начальных данных может привести к изменению решения до неузнаваемости. В реальной жизни мы всегда имеем величины, заданные с некоторой погрешностью (обусловленной хотя бы используемыми приборами), поэтому корректность системы является здесь ключевым моментом. Таким образом, вполне возможна ситуация, когда малое изменение начальных данных приведет к полному изменению свойств системы. Это последнее обстоятельство, кроме всего прочего, означает невозможность долгосрочного прогноза.

Из описанных выше трех вариантов нас интересует, как это ни странно, последний. Попробуем записать его на языке формул. В качестве самого простейшего (модельного) примера рассмотрим следующую задачу: пусть в каждый момент времени известна скорость точки, движущейся вдоль прямой линии, и пусть она равна $f(t)$. Будем считать также, что известна начальная координата u_0 в начальный момент времени $t = 0$. Закон движения точки, т.е. ее координата $u(t)$, определяется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с начальным условием (так называемая задача Коши):

$$u'(t) = f(t),\ u(0) = u_0.$$

Интегральное исчисление дает решение задачи в виде

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau. \qquad (1)$$

Предположим, что скорость не изменяется скачками (функция $f(t)$ непрерывна), тогда и формула (1), и здравый смысл подсказывают, что решением будет являться некоторая (как минимум) непрерывная функция, и она определена при любых сколь угодно больших значениях времени t. Естественно, из реального опыта известно, что тело можно разгонять достаточно долго (исключая экзотические случаи околосветовых скоростей).

Аналогичная задача

$$u'(t) = u(t),\ u(0) = u_0 > 0,\ (2)$$

т.е. когда тело разгоняется все быстрее и быстрее со скоростью, равной пройденному расстоянию, также имеет явное решение, определенное для всех t, в том числе при $t \to \infty$.

Теперь обратимся к внешне, казалось бы, не намного отличающемуся случаю

$$u'(t) = u^2(t),\ u(0) = u_0 > 0.\ (3)$$

Проинтегрировав это уравнение, находим единственное решение в явном виде

$$u(t) = \frac{1}{1/u_0 - t}. \qquad (4)$$

Построив график, легко видеть, что данная функция при любых сколь угодно малых начальных данных имеет вертикальную асимптоту при (конечном) значении $t_0 = 1/u_0$, т.е. решение всегда имеет бесконечный разрыв. Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. *При любых положительных начальных данных задача (3) не имеет глобального решения, определенного для всех значений $t > 0$.*

С математической точки зрения исследование такого рода дифференциальных уравнений опирается на теорему Пеано, которая устанавливает существование решения задачи на некотором малом участке $[t_0, t_0+ \varepsilon)$, и так называемую теорему о продолжении решения, которая дает условия, при которых решение можно продолжать неограниченно по $t \to \infty$. В случае задачи (3) решение нельзя продолжить после определенного момента, оно устремляется к бесконечности, иными словами, происходит «взрыв» решения. В зарубежной литературе часто применяют английское словосочетание «blowup». Как видим, локальное (т.е. существующее при $t < t_0+ 1/u_0$) решение есть всегда (при любых положительных начальных данных u_0). В общей постановке, когда мы не знаем явного вида решения, естественно возникает вопрос о максимальном времени существования этого локального решения, т.е. об оценках для t_0.

С физической точки зрения полученный результат означает, что какую бы малую начальную скорость не имело тело, мы можем разогнать его до *бесконечной* скорости за *конечное* время (что, очевидно, нереально), если сообщать ему скорость, пропорциональную квадрату расстояния.

Уравнение (3) встречается и в задачах популяционной генетики. Оно описывает, например, рост мирового народонаселения в некоторые периоды. Интересное обсуждение данной проблемы на научно-популярном уровне имеется в замечательной книге И.С. Шкловского [1], который, в частности, отмечает абсурдность решения вида (4) с точки зрения здравого смысла и делает вывод, что начиная с определенного момента данный (гиперболический) закон меняется на экспоненциальный (описываемый уравнением вида (2)).

Разумеется, для обыкновенных дифференциальных уравнений можно исследовать и существенно более общие вопросы о поведении решений, однако для нас сейчас главными являются те эффекты, которые можно изучать и для задач в частных производных.

Исторически одной из первых была задача Коши для параболического уравнения в пространстве $\mathbb{R}^N \times (0, \infty), N \geq 3$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^q, \quad u|_{t=0} = u_0(x) > 0. \qquad (5)$$

Мы рассматриваем положительные решения данной задачи, что, в частности, диктуется и реальным физическим смыслом (например, температура $u(x, t)$ всегда больше абсолютного нуля).

Классический результат Х. Фужиты [2], положивший начало теории отсутствия решений уравнений с частными производными, формулируется так.

Предложение 1. *При*

$$1 < q \leq q^* = \frac{N+2}{N}$$

задача (5) не имеет глобального положительного решения ни при каких начальных данных.

При $q > q^*$ задача (5) имеет глобальное решение для некоторых достаточно быстро убывающих на бесконечности начальных данных.

Таким образом, появляется так называемый критический показатель нелинейности q^*, разделяющий области значения степени q, в которых задача имеет или не имеет глобального решения.

Отметим, что оказалось также возможным исследовать более общий объект, чем уравнение, а именно неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq u^q, \quad u|_{t=0} = u_0(x) > 0. \qquad (6)$$

Для задачи (6) предложение 1 также остается справедливым, т.е. мы сталкиваемся с довольно неожиданным фактом: задача для более общего объекта — не строгого неравенства — имеет тот же ответ, что и задача для менее общего объекта — уравнения.

В классической теории дифференциальных уравнений с частными производными принято различать три основных типа — эллиптические, параболические и гиперболические задачи. Приведенное выше неравенство (6) относится к параболическому типу.

Для эллиптического неравенства

$$-\Delta u \geq u^q \qquad (7)$$

М.Ф. Бидо-Верон [3] доказала отсутствие глобального решения при $q \leq N/(N-2)$. И наконец, для гиперболической задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \geq u^q, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_0(x) > 0 \qquad (8)$$

отметим результат Т. Като [4] об отсутствии глобального решения при $q \leq (N + 1)/(N-1)$. Необходимо подчеркнуть, однако, что Като доказал свое утверждение при некоторых дополнительных условиях, и полученный критический показатель не является неулучшаемым.

Все три приведенных выше результата доказывались разными методами. Тем не менее можно заметить некоторую общность данных результатов в плане структуры критических показателей: они получаются друг из друга, если просто добавлять единичку к числителю и знаменателю. Данный факт не является случайным, и, по-видимому, впервые это было отмечено в работах С.И. Похожаева с соавторами [5, 6]. Там же был предложен достаточно универсальный метод, позволяющий в едином ключе получить результаты об отсутствии глобальных решений для всех трех типов дифференциальных неравенств.

На основании этого метода в работах одного из авторов статьи [7, 8] получен результат, в определенном смысле объединяющий предыдущие. Итак, рассмотрим эволюционное дифференциальное неравенство высокого порядка

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq u^q, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\bigg|_{t=0} = u_0(x) > 0, \tag{9}$$

где $k = 1, 2, \ldots$. Полученный результат формулируется так.

Предложение 2. *При*

$$1 < q \leq q^* = \frac{N + 2/k}{N - 2 + 2/k}$$

задача (9) не имеет глобального положительного решения ни при каких начальных данных.

При $k = 1$ получаем утверждение Фужиты (предложение 1), при $k = 2$ — результат Като, а в пределе при $k \to \infty$ получаем критический показатель Бидо-Верон $N/(N-2)$.

Сформулируем постановку задачи в общей операторной форме. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, выделено измеримое множество Ω, которое может быть как ограниченным, так и неограниченным и, в частности, совпадать со всем $\mathbb{R}^N$. Введем класс функций W, заданных на множестве Ω, и пусть определен оператор A, не обязательно линейный, отображающий каждую функцию $u \in W$ в функцию Au, определенную на Ω. При этих условиях имеет смысл не равенство

$$Au(x) \geq |u(x)|^q, \quad x \in \Omega, \ u \in W, \ q > 0. \tag{10}$$

Требуется решить неравенство (10), либо доказать отсутствие решений из класса W. Пример. На отрезке $[a, b] = \Omega \subset \mathbb{R}$ рассмотрим неравенство

$$u'(x) \geq |u(x)|^q, q > 0. \tag{11}$$

Будем искать решение из класса

$$W = \{u(x) : u(x) \in AC[a, b]; u(a) = u(b)\}. \tag{12}$$

Напомним, что символом $AC[a, b]$ обозначаются функции, абсолютно непрерывные на отрезке $[a, b]$. Умножим неравенство (11) на фиксированную функцию $\varphi \in W$ и результат проинтегрируем по отрезку $[a, b]$, что дает:

$$\int_a^b |u(x)|^q \varphi(x)dx \le \int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = u\varphi\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx.$$

В силу периодичности краевых условий слагаемое $u\varphi\big|_a^b = 0$, что приводит к неравенству

$$\int_a^b |u(x)|^q \varphi(x)dx \le -\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx. \qquad (13)$$

В класс W входит функция φ (x) ≡1. Для нее неравенство (13) принимает вид

$$\int_a^b |u(x)|^q dx \le 0,$$

а откуда очевидно, что допустимо только одно решение $u(x) \equiv 0,\ x \in [a, b]$. Полученный результат удобно оформить следующим образом. Предложение 3. Для каждого числа q > 0 не существует функции u(x) из класса W, определенного в (12), которая удовлетворяет неравенству (11) и отлична от тождественного нуля. Продолжим изучение общего неравенства (10). В наиболее типичных случаях появляется число q*, называемое критическим, которое отделяет интервал существования решения неравенства (10) от интервала, где решение не существует. Заметим, что постановка задачи (10) в форме неравенства несколько обобщает привычные уже постановки в форме уравнения, а главное — дает возможность относительно легко доказывать существование решения, так как для неравенств это сделать много проще.

Пока еще рано говорить о результатах для неравенств с существенно нелинейным оператором *A*. Имеются отдельные достижения для случая квазилинейных дифференциальных операторов. Наибольшее число исследований за дачи (10) связано с линейными операторами. Для них начало общей схемы доказательства отсутствия решений задачи (10) можно представить в следующей форме. Выберем положительную в Ω гладкую функцию φ (*x*) , называемую пробной, и умножим на нее неравенство (10). После интегрирования по множеству Ω получаем неравенство

$$\int_\Omega |u(x)|^q \varphi(x)dx \le \int_\Omega A\,u(x)\varphi(x)dx \equiv (Au,\ \varphi). \qquad (14)$$

Используя линейность оператора A, «перебросим» его на второй множитель φ в виде формально сопряженного оператора A*, т.е. считаем допустимым тождество (Au, φ) = (u, A* φ). Тогда неравенство (14) примет вид

$$\int_\Omega |u(x)|^q \varphi(x)dx \le (u, A^*\varphi). \qquad (15)$$

А теперь допустим, что существует пробная функция φ со свойством *A** φ= 0. Тогда из (15) следует, что

$$\int_{\Omega} |u(x)|^q \varphi(x)dx \le (u, A^*\varphi).$$

откуда в силу условия φ (x) > 0 получаем только тривиальное решение u(x) ≡0, x ∈Ω. Именно такая схема была применена в примере. Недостаток ее в том, что решения уравнения A* φ= 0 в типичных случаях не могут быть приняты в качестве пробных функций, так как интеграл

$$\int_{\Omega} Au(x)\varphi(x)dx$$

может расходиться. Тем не менее именно такая идея лежит в основе метода пробных функций, детально разработанного Э. Митидиери и С.И. Похожаевым [9].

В заключение приведем одно направление исследований, которое систематически стало изучаться именно в связи с развитием метода пробных функций. При ознакомлении с современной литературой по критическим степеням бросается в глаза следующий факт: авторы большинства работ не рассматривают вопрос о том, зависит ли критический показатель q^* от выбранного класса решений W. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u = u^q, \quad u > 0, \ q > 1, \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{16}$$

Сформулируем результат работы [10] в виде теоремы.

Теорема. Если $1 < q < (N + 2)/(N - 2)$ $(N > 2)$, то уравнение (16) не имеет не тривиального классического решения $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Если же $q \ge (N + 2)/(N - 2)$, то такое решение определено.

Другими словами, если выбрать класс решений $W_0 = C^2(\mathbb{R}^N)$, то критическая степень для уравнения (16) равна $(N + 2)/(N - 2)$. В то же время, если сменить класс решений уравнения (16) по аналогии с задачей (7) на $W = L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, то с помощью метода пробных функций можно показать, что критическая степень $q^* = N/(N - 2)$. Различие критических степеней для одного и того же уравнения очевидно.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН С.И. Похожаеву за полезное обсуждение результатов.

Литература

1 *Шкловский И.С. Вселенная, жизнь, разум. М, 1976.*
2 *2. Fujita H. On the blowingup of solutions of the Cauchy problems for ut = Δu + u1 + α //*
3 *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1966. V.13. P.109—124.*
4 *BidautVeron M.F. Local and global behavior of solutions of quasilinear equations of EmdenFowler type // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V.107. P.392—324.*
5 *Kato T. Blowup of solutions of some nonlinear hyperbolic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1980. V.33. P.501—505.*
6 *Pohozaev S., Tesei A. Blowup of nonnegative solutions to quasilinear parabolic inequalities // Rend. Mat. Acc. Lincei. s. 9. 2000. V.11. P.99—109.*
7 *Veron L., Pohozaev S.I. Blowup results for nonlinear hyperbolic inequalities // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 2000. V.29, №2. P.393—420.*
8 *Laptev G.G. Absence of solutions to evolutiontype differential inequalities in the exterior of a ball // Russ. J. Math. Phys. 2002. V.9. №2. P.180—187.*
9 *Laptev G.G. Nonexistence results for higherorder evolution partial differential inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V.131, №2. P.415—423.*
10 *Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений диффе ренциальных неравенств в частных производных. М., 2001. (Труды МИАН. Т.234.)*

11 *Gidas B., Spruck J. Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear ellip tic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V.34. P.525—598.*
12 *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.*
13 *12. Levine H.A. The role of critical exponents in blow-up theorems // SIAM Reviews. 1990.*
14 *V.32. P.371—386.*
15 *Лаптев Г.И. Условия несуществования глобальных решений задачи Коши для параболического уравнения с интегральным нелинейным возмущением // Дифференц. уравнения. 2002. Т.38, №4. С.435—446.*